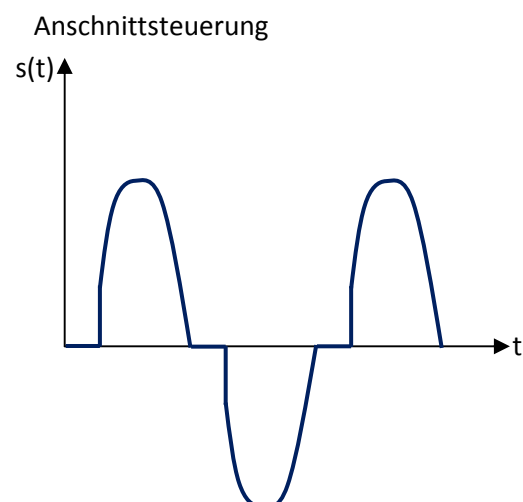
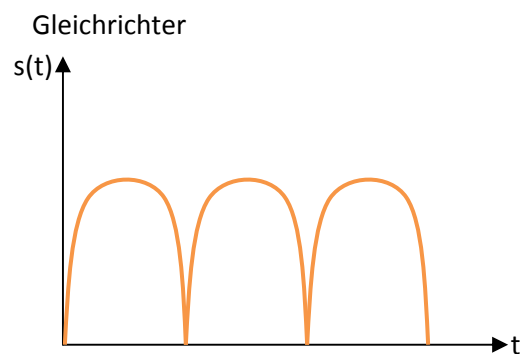
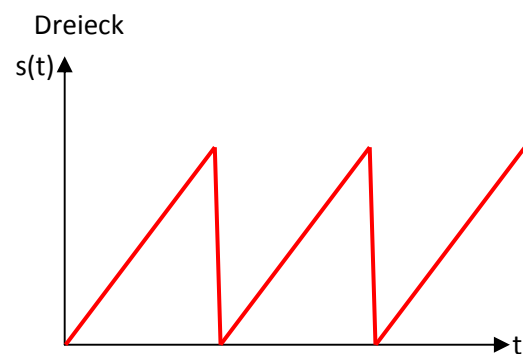
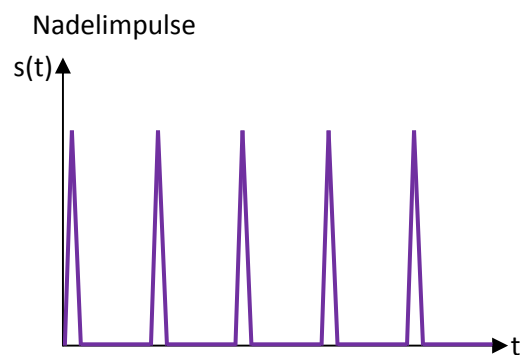
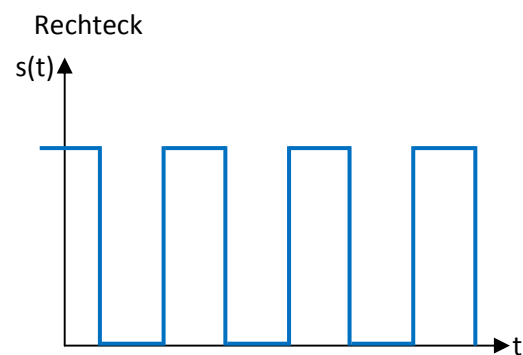
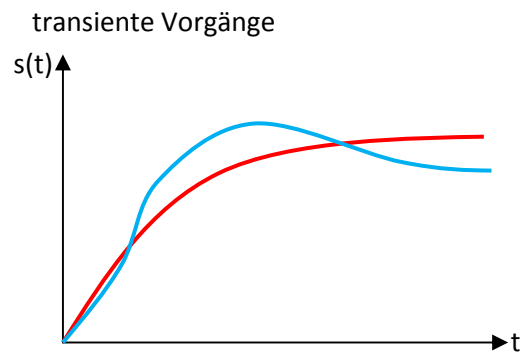
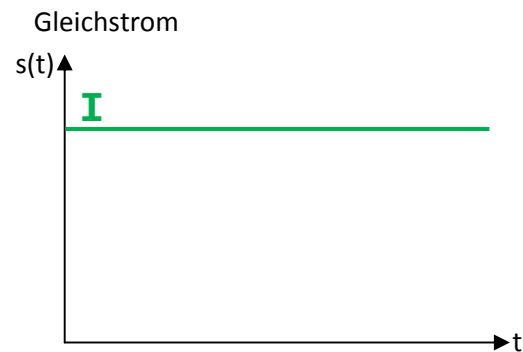


Signale

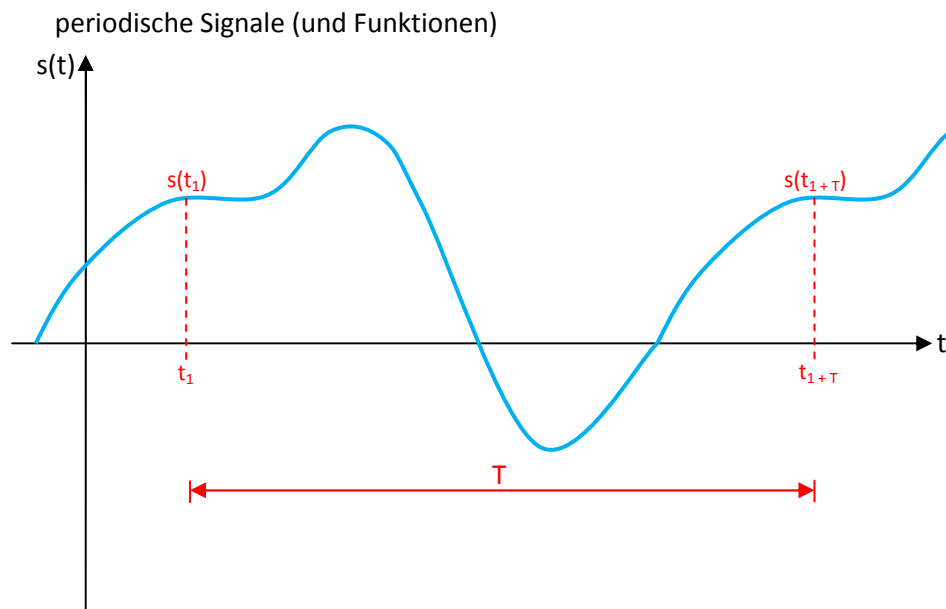
Ein Signal ist die Darstellung einer Information durch physikalische Größen.



Fourier-Analyse

Jedes beliebige Signal lässt sich als Summe von Sinusschwingungen darstellen.

$$\text{beliebiges } s(t) = \sum_{(\cos)} \sin - \text{Schwingungen}$$



Definition: periodische Funktion

$$s(t + T) = s(t)$$

T...Periodendauer

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$s(t + T) = s(t + 2T) = s(t + 3T) = \dots$$

$$s(t) = s(t + n * T) \quad \text{für alle } t, \quad n \in \mathbb{Z}$$

enthaltene Frequenzen im periodischen Signal:

$$f_0 = 0 \dots\dots\dots \text{Gleichanteil} = \text{arithmetischer Mittelwert von } s(t)$$

$$f_1 = \frac{1}{T} \dots\dots\dots \text{Grundschwingung oder 1. Harmonische}$$

$$f_2 = \frac{2}{T} = 2 * f_1 \dots\dots\dots \text{1. Oberwelle oder 2. Harmonische}$$

$$f_3 = \frac{3}{T} = 3 * f_1 \dots\dots\dots \text{2. Oberwelle oder 3. Harmonische}$$

$$f_n = \frac{n}{T} = n * f_1 \dots\dots\dots (n-1). \text{ Oberwelle oder } n. \text{ Harmonische}$$

"Harmonisch" = sinusförmige Schwingung

Darstellungsformen von s(t)

Jede periodische Schwingung lässt sich als Summe von harmonischen Schwingungen darstellen.

1.) Σ cos-Schwingungen + Phase

$$s(t) = c_0 + c_1 * \cos(\omega t + \varphi_1) + c_2 * \cos(2\omega t + \varphi_2) + c_3 * \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n * \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

c_0 Gleichanteil

c_1 Amplitude der Grundschiwingung

c_n Amplitude der n-ten Harmonischen

φ_n Phase der n-ten Harmonischen

2.) Σ cos- und sin-Schwingungen

$$s(t) = a_0 + a_1 * \cos(\omega t) + b_1 * \sin(\omega t) +$$

$$a_2 * \cos(\omega t) + b_2 * \sin(\omega t) +$$

$$a_3 * \cos(\omega t) + b_3 * \sin(\omega t) + \dots$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n * \cos(n\omega t) + b_n * \sin(n\omega t)]$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \sin(n\omega t)$$

a_0 Gleichanteil

a_1 Amplitude der Cosinus-Schwingung mit Grundfrequenz

b_1 Amplitude der Sinus-Schwingung mit Grundfrequenz

usw...

$$a_0 = \frac{1}{T} * \int_{1 \text{ Periode}} s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} * \int_{1 \text{ Periode}} s(t) * \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} * \int_{1 \text{ Periode}} s(t) * \sin(n\omega t) dt$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega T = 2\pi$$

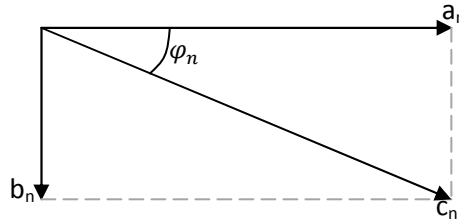
$$\int \dots dt \triangleq \int_0^T \dots dt \triangleq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dots dt \triangleq \int_{-\frac{3T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \dots dt$$

1 Periode

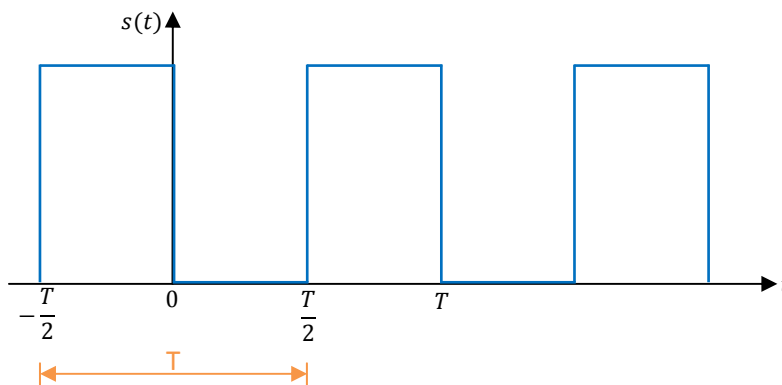
$c_0 = a_0$ Gleichanteil oder arithmetischer Mittelwert

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$



Beispiel: Rechteckfunktion:



$$s(t) = \begin{cases} H & \text{für } -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

ges: $a_0, a_n, b_n, c_0, \varphi_n$, Spektrum, $s(t), s_n(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 H dt + \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 0 dt}_0 = \frac{1}{T} Ht \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{1}{T} H(0 - (-\frac{T}{2}))$$

$$a_0 = \frac{H}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) * \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 H * \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \underbrace{0 * \cos(n\omega t)}_0 dt$$

$$a_n = \frac{2H}{n2\pi} [0 + \sin(n\pi)]$$

$$a_n = 0 \quad \text{0 für alle } n \in \mathbb{Z}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) * \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 H * \sin(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \underbrace{0 * \sin(n\omega t)}_0 dt$$

$$b_n = \frac{2H}{T} * \frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 = -\frac{2H}{n\omega T} * \left[\cos(n\omega * 0) - \cos\left(n\omega \frac{-T}{2}\right) \right]$$

$$b_n = -\frac{2H}{n2\pi} \left[1 - \cos\left(-n\frac{2\pi}{2}\right) \right] = -\frac{H}{n\pi} * [1 - \cos(n\pi)]$$

$$b_1 = -\frac{H}{\pi} * [1 - \cos(\pi)] = -\frac{H}{\pi} * [1 - (-1)] = -\frac{2H}{\pi}$$

$$b_2 = -\frac{H}{2\pi} * [1 - \cos(2\pi)] = -\frac{H}{2\pi} * [1 - 1] = 0$$

$$b_3 = -\frac{H}{3\pi} * [1 - \cos(3\pi)] = -\frac{2H}{3\pi}$$

$$b_4 = 0$$

$$b_5 = -\frac{2H}{5\pi}$$

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2H}{n\pi} & \text{für } n = \text{ungerade} \\ 0 & \text{für } n = \text{gerade} \end{cases}$$

$$c_0 = a_0 = \frac{H}{2}$$

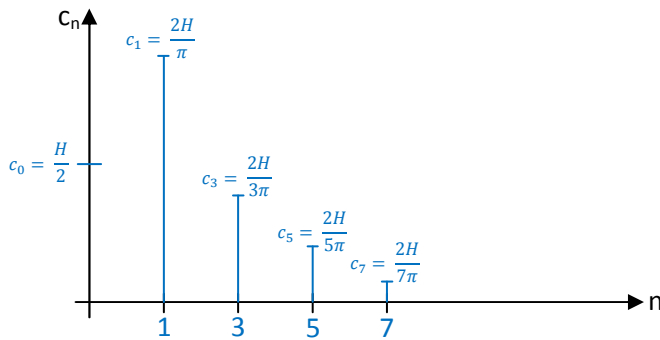
$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = -\arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Spektrum eines Signals

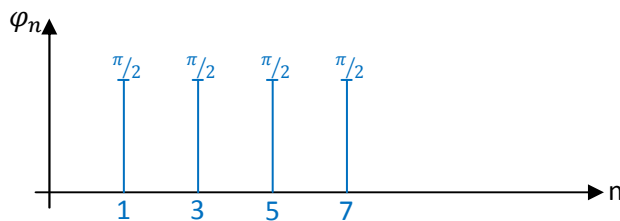
Das Spektrum eines Signals zeigt die Amplitude der Frequenzen die im Signal enthalten sind.

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n * \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\text{Bsp.: } s(t) = \frac{H}{2} + \frac{2H}{\pi} * \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2H}{3\pi} * \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2H}{5\pi} * \cos\left(5\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$



Amplitudenspektrum



Phasenspektrum

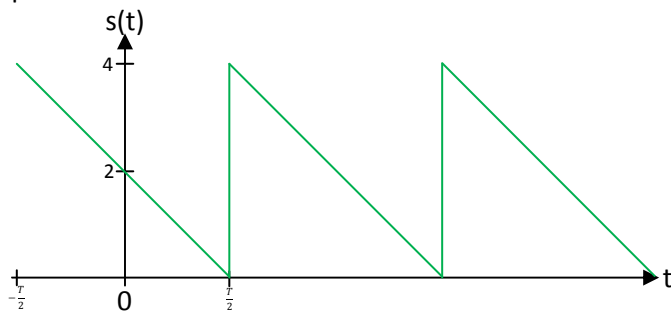
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \sin(n\omega t)$$

$$\text{Bsp.: } s(t) = \frac{H}{2} - \frac{2H}{\pi} * \sin(\omega t) - \frac{2H}{3\pi} * \sin(3\omega t) - \dots$$

//ToDo: Bild

Periodische Funktionen ergeben ein Linienspektrum s.h. es sind nur diskrete Frequenzen enthalten (nur vielfache der Grundfrequenz f_1). Also jede periodische Funktion lässt sich in abzählbar unendlich viele Frequenzen zerlegen.

Bsp.:

ges.: $s(t), a_0, a_n, b_n, c_0, c_n, \varphi_n, \text{Spektrum}, s_7(t)$

$$y = k * x + d$$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{T}$$

$$d = y(0) = 2$$

$$s(t) = -\frac{4}{T} * t + 2 \text{ für } -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{4}{T} * t + 2 \right) dt$$

$$a_0 = \frac{-4}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t dt + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt$$

$$a_0 = \frac{-4}{T^2} * \frac{t^2}{2} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T} * t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-4}{T^2} * 2 \left[\left(\frac{T}{2} \right)^2 - \left(-\frac{T}{2} \right)^2 \right] + \frac{2}{T} \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right] = 0 + \frac{2}{T} * \frac{2T}{2} = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\left(-\frac{T}{2} t + 2 \right)}_u * \underbrace{\cos(n\omega t)}_v dt$$

$$u' = -\frac{4}{T} \quad v = \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\left(-\frac{4}{T} t + 2 \right) * \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{4}{T} \right) * \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} dt \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\underbrace{\left(-\frac{4}{T} * \frac{T}{2} + 2 \right)}_0 * \frac{\sin\left(n\omega \frac{T}{2}\right)}{n\omega} - \underbrace{\left(-\frac{4}{T} * \left(-\frac{T}{2} \right) + 2 \right)}_4 * \frac{\sin\left(n\omega \frac{T}{2}\right)}{n\omega} - \frac{4}{T} * \frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right]$$

$$a_n = \frac{2 * (-4)}{n\omega T} * \sin\left(n\omega \frac{-T}{2}\right) - \frac{8}{T^2} * \frac{\overbrace{\cos\left(n\omega \frac{T}{2}\right) - \cos\left(n\omega \frac{-T}{2}\right)}^0}{(n\omega)^2}$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$a_n = \frac{8}{n2\pi} * \sin\left(n \frac{2\pi}{2}\right) = \frac{4}{n\pi} * \sin(n\pi) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$