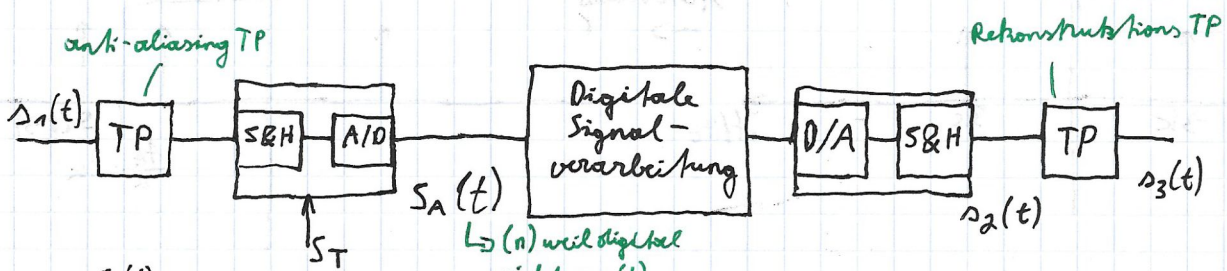
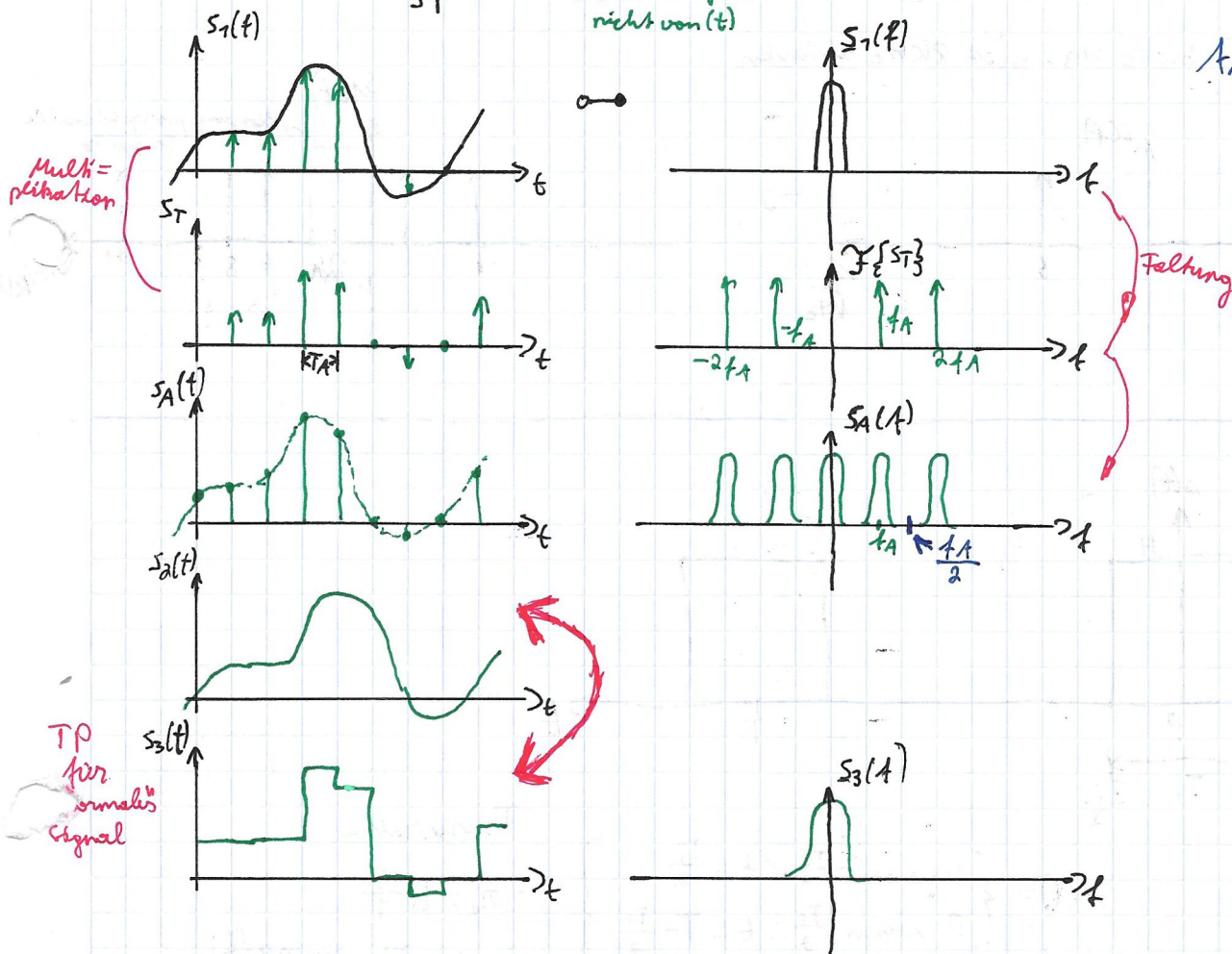


# Abtastsysteme



$$f_A = \frac{1}{T_A} = 49 \text{ kHz}$$

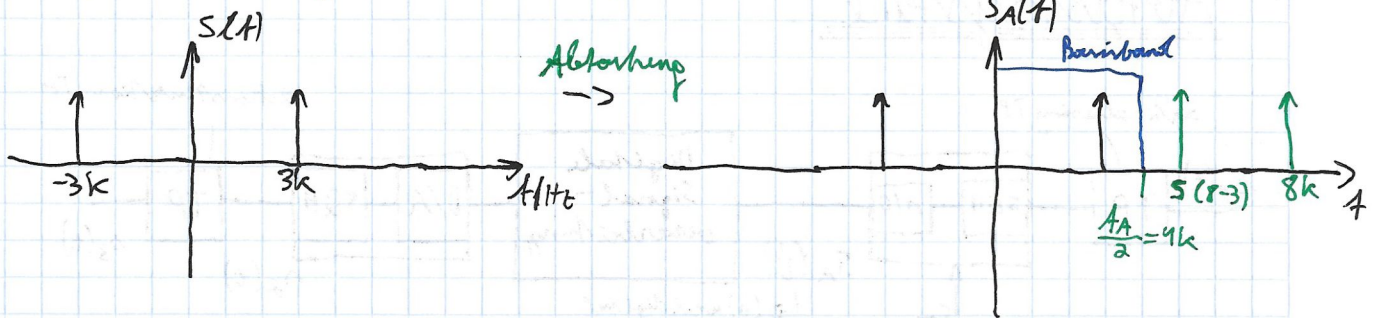


Das Spektrum der abgetasteten Funktion  $s_A(t)$  entspricht dem Spektrum der Originalfunktion  $s_1(t)$ , jedoch mit periodischer WH..

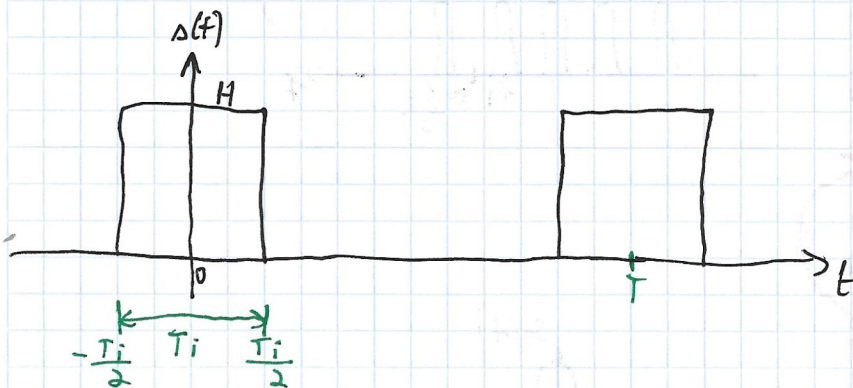
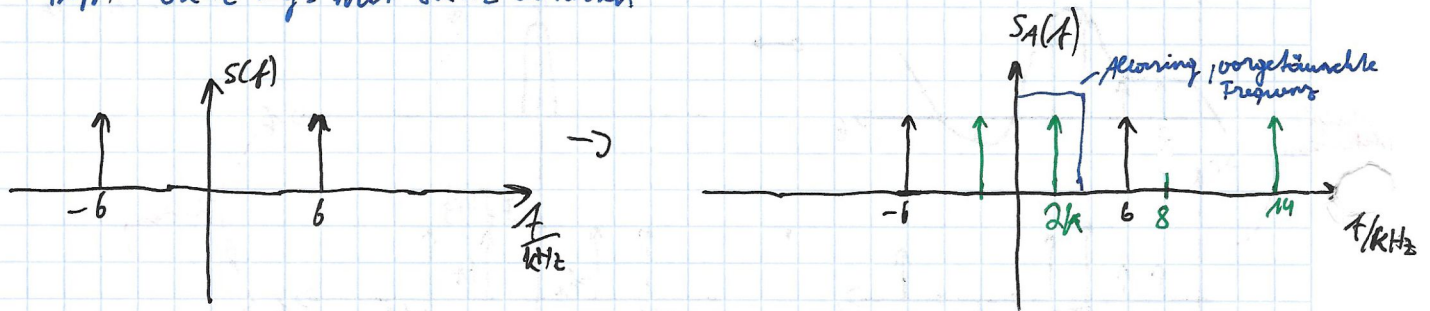
Die Abtastfrequenz  $f_A$  ist die Periode des periodischen Spektrums.

Bandüberlappung (Aliasing) tritt nicht auf, wenn das Frequenzspektrum eine begrenzte Bandbreite  $B$  besitzt und die Abtastfrequenz  $f_A$  hoch genug gewählt wird  $\boxed{f_A \geq 2B}$ .

Bsp: 3 kHz Signal mit 8 kHz abgetastet



Bsp: 6 kHz Sig. mit 8 kHz abtasten



$$\Delta(t) = \begin{cases} H & \text{wenn } -\frac{T_i}{2} < t \leq \frac{T_i}{2} \\ 0 & \text{wenn } \frac{T_i}{2} < t \leq T - \frac{T_i}{2} \end{cases}$$

Fourierreihe:

$$\sigma_0 = H \frac{T_i}{T}$$

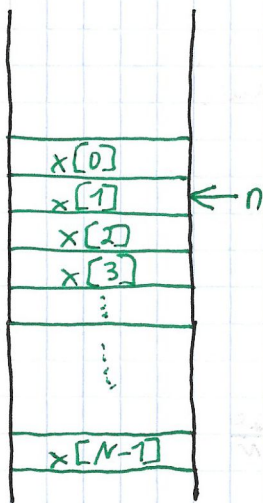
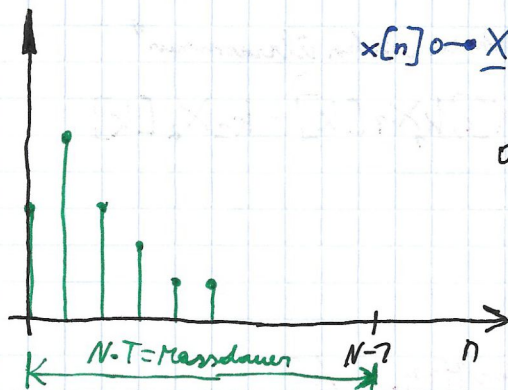
$$\sigma_n = 2H \frac{T_i}{T} \frac{\sin(n\pi \frac{T_i}{T})}{n\pi \frac{T_i}{T}}$$

$$\omega T = 2\pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

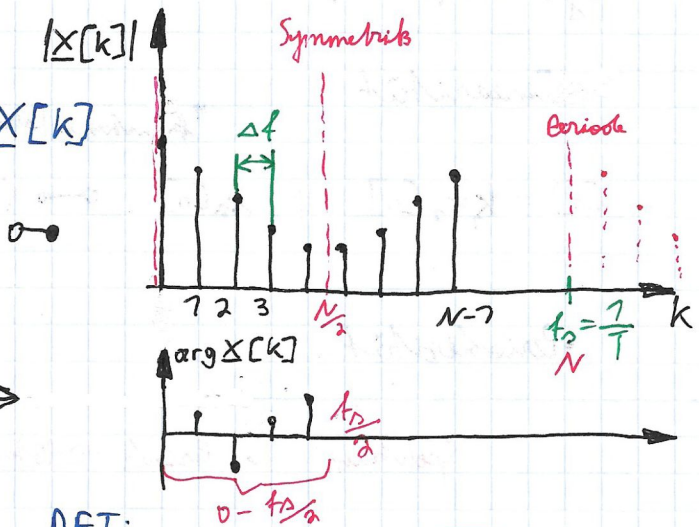
$$\Delta_n(t) = \sigma_0 + \sum_{n=1}^N \sigma_n \cos(n\omega t)$$

# Discrete Fourier Transformation DFT

$x[n]$  - diskrete Werte



$$x[n] \rightarrow \underline{X}[k]$$

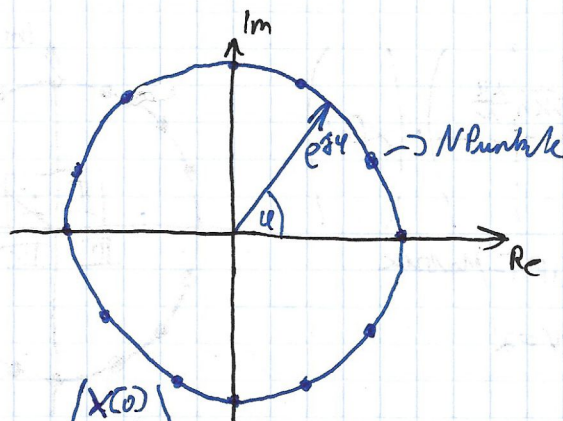


DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jkn \frac{2\pi}{N}}$$

$$k, n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$



DFT-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{6\pi}{N}} & e^{-j\frac{8\pi}{N}} & e^{-j\frac{10\pi}{N}} & e^{-j\frac{12\pi}{N}} & e^{-j\frac{14\pi}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{(N-1)2\pi}{N}} & e^{-j\frac{(N-1)4\pi}{N}} & e^{-j\frac{(N-1)6\pi}{N}} & e^{-j\frac{(N-1)8\pi}{N}} & e^{-j\frac{(N-1)10\pi}{N}} & e^{-j\frac{(N-1)12\pi}{N}} & e^{-j\frac{(N-1)14\pi}{N}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix}$$

- DFT-Koeffizientenvektor

Signalvektor

$$\Delta f = \frac{f_0}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{\text{Messdauer}}$$

Eigenschaften:

• Linearität

"konstante Faktoren werden übernommen"

$$x[n] = k_1 x_1[n] + x_2[n] \quad \rightarrow \quad X[k] = k_1 X_1[k] + X_2[k]$$

• Periodizität

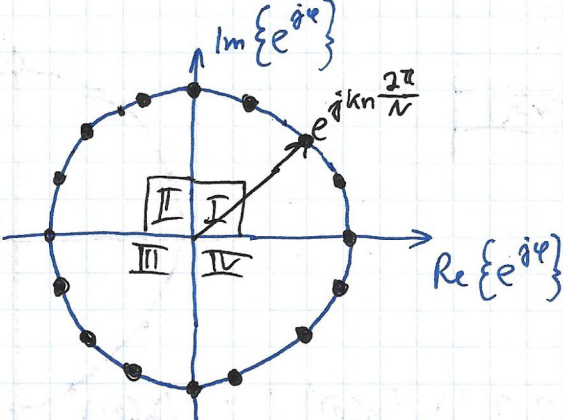
Spektrum  $\rightarrow$  Periode  $\rightarrow$  Abtastfreq.  $1/N$

Zeitbereich  $\rightarrow$  Periode  $N \cdot T$  (Messdauer)

### Fast Fourier Transformation FFT

$$\begin{pmatrix} X[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & e^{jkn \frac{2\pi}{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x[n] \end{pmatrix}$$

DFT-Matrix  
 $N=2^i$



Die FFT ist ein spezieller Algorithmus für die Berechnung von der DFT.  
Voraussetzung: Anzahl der Diskrete  $N=2^i$

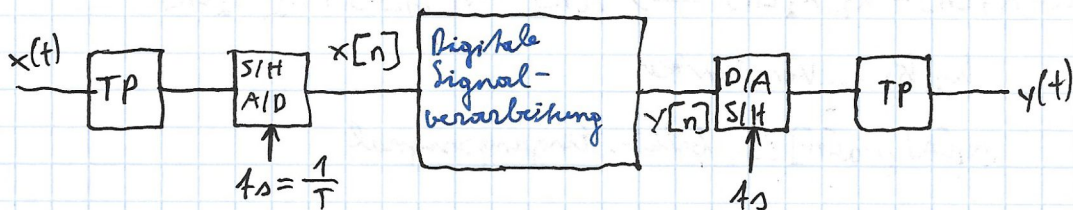
DFT:  $N \cdot N = N^2$  komplexe Multiplikationen

FFT:  $\frac{N}{2} \log_2(N)$  - komplexe Multiplikationen

Beispiel:  $N=1024=2^{10}$  DFT:  $N^2 = 2^{20} = 1\,048\,576$  komp. Multipl.

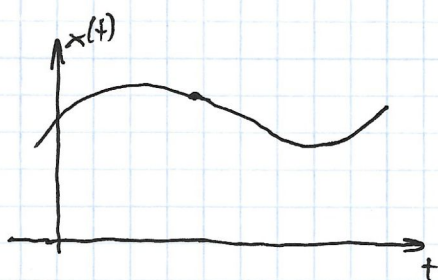
FFT:  $\frac{N}{2} \log_2(N) = 5720$  komp. Multipl.

# Zeitdiskrete Signale & Systeme



$T_s$  = sampling frequency, Abtastfrequenz

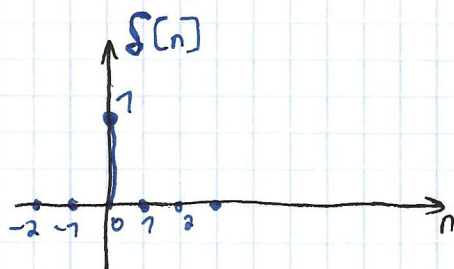
$T$  = Abtastzeit



Speicher  $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$

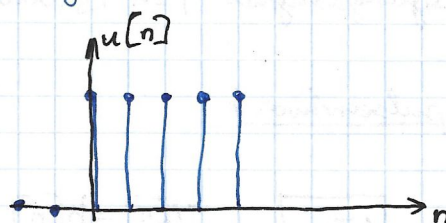
## Elementare Signale:

Einheitsimpuls



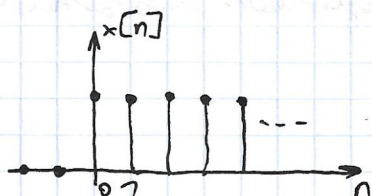
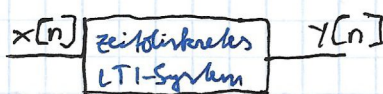
$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Einheitsprung, Einheitschritt



$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$

## Lineare zeitinvariante diskrete Systeme (linear time invariant, LTI-System)

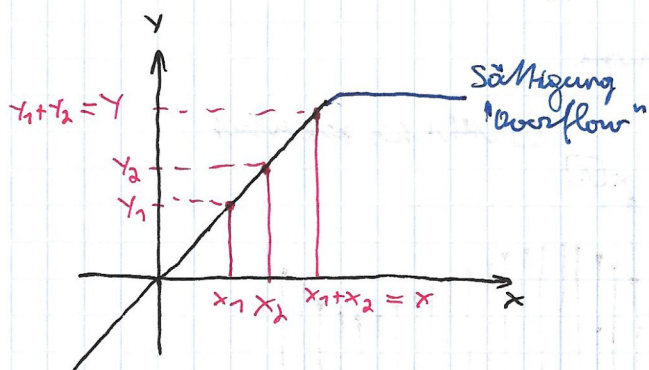


Linearität:

$$x[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \Rightarrow y[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$$

$k_1, k_2 \dots$  Konstanten

$x_1[n], x_2[n] \dots$  belieb. Eingangssignal

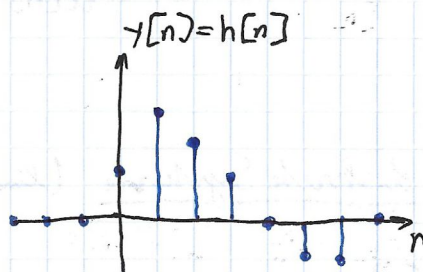
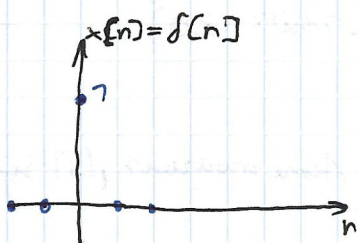


Zeitinvarianz

$$x[n-i] \Rightarrow y[n-i]$$

Ein System ist zeitinvariant wenn ein um  $i$  Abtastwerte verzögertes Eingangssignal  $x[n-i]$  ein um  $i$  Abtastwerte verzögertes Ausgangssignal  $y[n-i]$  bewirkt.

Impulsantwort

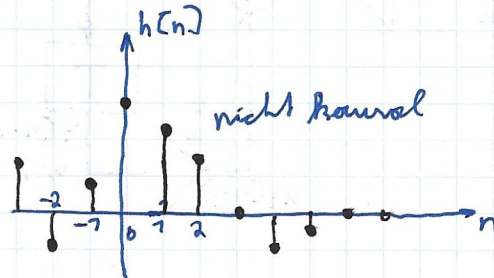


Die Impulsanhr.  $h[n]$  ist eine Beschreibungsmöglichkeit eines zeitdiskreten LTI-Systems.

## Kausalität

Ein zeitdiskretes LTI-System heißt kausal wenn seine Impulsantwort kausal ist.

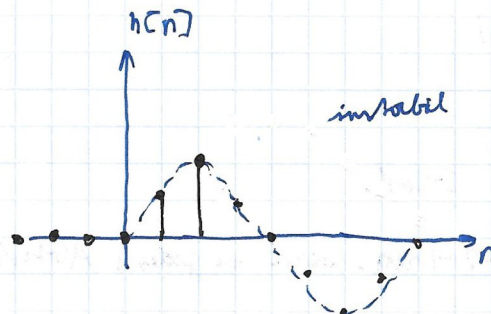
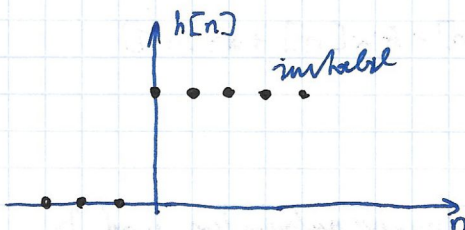
$$h[n] = 0 \quad \text{für} \quad n < 0$$



## Stabilität

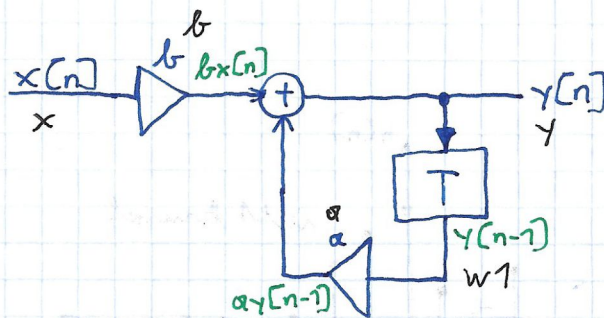
Ein zeitdiskretes LTI-System heißt stabil, wenn seine Impulsantwort absolut summierbar ist.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$



# Digitale Filter

## TP 1. Ordnung



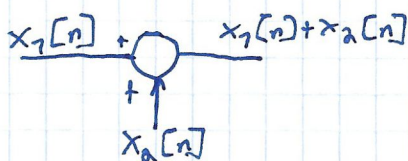
Multiplikation



Zeitverzögerung um 1 Abtastzeit



Addition

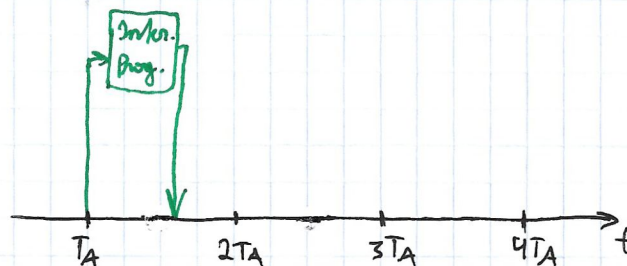


Differenzgleich:

$$y[n] = b x[n] + a y[n-1]$$

Programm: C-Code

Ein Interrupt-Prog. wird zu jedem Abtastzeitpunkt aufgerufen und  $7x$  durchlaufen.



Variablen def:

float  $x, y, w1=0, a=..., b=...$ ;

Interrupt: (nächste Seite)

Interrupt:

TP\_1\_10rd-Interrupt

$x = \text{Eingang}_i$

$y = b \cdot x + a w_i$

$w_i = y_i$

Ausgang =  $y_i$

Ende\_TP\_10rd-Interrupt

Berechnen der Konstanten

$$\alpha = \frac{\tau}{\tau + T}$$

$$b = \frac{T}{\tau + T}$$

$$T = \frac{1}{f_s}$$

$$\alpha = 1 - b$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_g} = \frac{1}{2\pi f_g}$$

z.B.:  $f_s = 48 \text{ kHz}$

$f_g = 1 \text{ kHz}$

$$\alpha \approx 0,88425$$

$$b \approx 0,11575$$

Zum Dimensionieren von dig. Filtern verwendet man Computer-Prog. (z.B. Matlab)

Übertragungsfunktion, Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Die Übertragungsfunktion erhält man mit der  $z$ -Transf. aus der Differenzenglg.

## z-Transformation

$$x[n] \quad \longleftrightarrow \quad X(z)$$

Zeitbereich      Bildbereich, z-Bereich

Die z-Transf. wird zur einfachen Berechnung der Übertragungsfunktion von zeitdiskreten LTI-Systemen verwendet.

### Linearität

$$k_1 x_1[n] \quad \longleftrightarrow \quad k_1 X_1(z)$$

$$k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \quad \longleftrightarrow \quad k_1 X_1(z) + k_2 X_2(z)$$

### Zeitverschiebung

$$x[n-i] \quad \longleftrightarrow \quad z^{-i} X(z)$$

Eine Zeitverzögerung um  $i$  Abtastintervalle im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit  $z^{-i}$  im Bildbereich

### Anwendung

Differenzenglg.

$$y[n] = b x[n] + a y[n-1]$$

$$Y(z) = b X(z) + a z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) - a z^{-1} Y(z) = b X(z)$$

$$Y(z) (1 - a z^{-1}) = b X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - a z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \dots \text{Übertragungsfkt.}$$

Der Frequenzgang ergibt sich aus der Übertragungsfunktion  $H(z)$ , indem man  $z = e^{j\Omega}$  einsetzt.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

wobei

$$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

$f_s$  ... sampling frequency

$f$  ... Frequenzvariable von  $0 \dots \frac{f_s}{2}$

oder  $\Omega = 0 \dots \pi$

Amplitudengang ist der Betrag von  $H(e^{j\Omega})$

Phasengang ist die Phase von  $H(e^{j\Omega})$

$|H(e^{j\Omega})|$  und  $\arg H(e^{j\Omega})$

Bsp.) TP 1. Ord.  $\alpha = 0,88425$ ;  $\beta = 0,11575$ ;  $f_s = 48 \text{ kHz}$

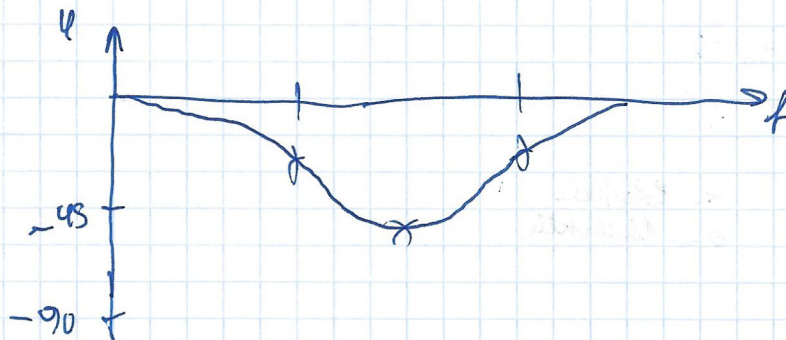
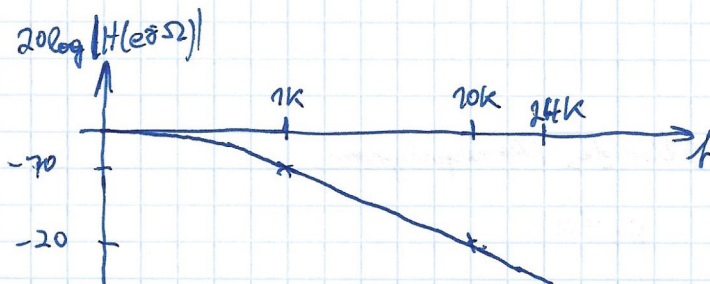
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{0,11575}{1 - 0,88425 \cdot e^{-j\Omega}}$$

$e^{j\Omega}$  mit Taschenrechner

$\Omega$  komplex u. rad.

$$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

| f                          | 0 | 500  | 1k    | 2k    | 5k    | 10k  | 24k = $f_s/2$ |
|----------------------------|---|------|-------|-------|-------|------|---------------|
| $20 \log  H(e^{j\Omega}) $ | 0 | -7   | -31,3 | -71,4 | -74,5 | -20  | -29           |
| $\arg H(e^{j\Omega})$      | 0 | -26° | -43°  | -57°  | -60°  | -49° | 0             |

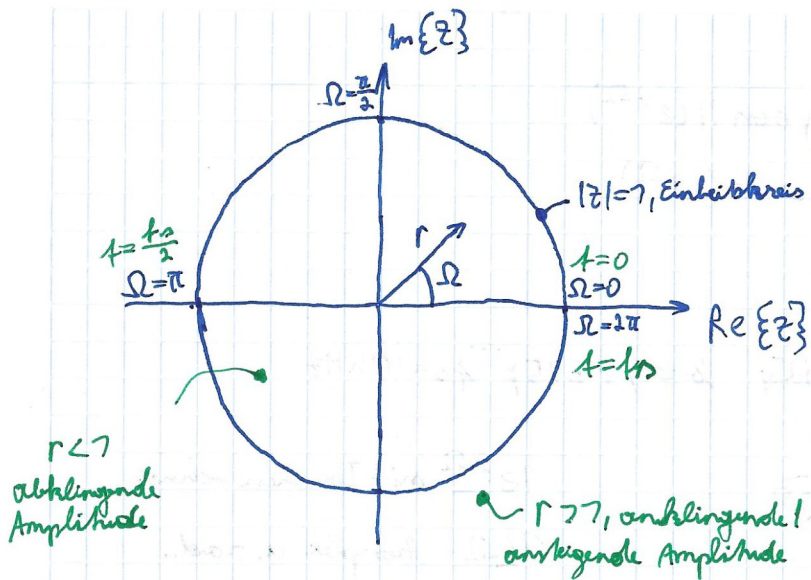


Pol- und Nullstellen in der komplexen  $z$ -Ebene

$z$  allgemein  $z = r \cdot e^{j\Omega}$

$r$  ... Betrag

$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$  ... normierte Kreisf.



$$z = r \cos(\Omega) + j r \sin(\Omega)$$

$$H(z) = \frac{b}{1 - \alpha z^{-1}} \cdot \frac{z^1}{z^1} = \frac{b z}{z - \alpha}$$

$\uparrow$  mit der höchsten Ordnung erweitern  
 $\uparrow$

Polstellen sind die Nullstellen des Nennerpolynoms

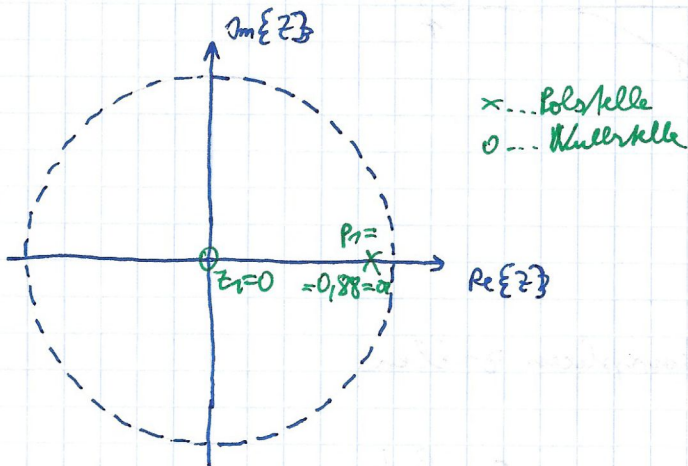
$$z - \alpha = 0$$

$$p_1 = \alpha$$

Nullstellen sind die Nullstellen des Zählerpolynoms

$$b \cdot z = 0$$

$$z_1 = 0$$



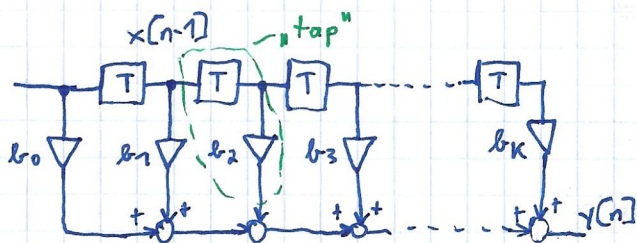
## Stabilität

Ein zeitdiskretes LTI-System ist stabil, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen

## Filterarten

### FIR

finite impulse response  
endl. Impulsantwort.  
nicht rekursive Filter



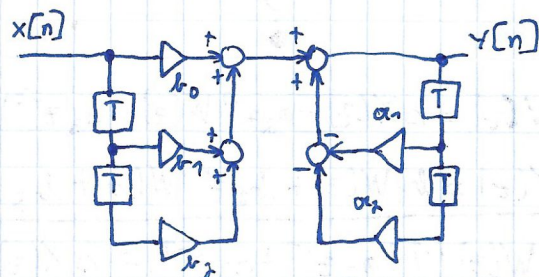
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots$$

immer stabil,  
ergibt höhere Ordnung und  
höheren Rechenaufwand

### IIR

infinite impulse response  
unendl. Impulsantwort,  
rekursive Filter



$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] -$$

$$- \alpha_1 y[n-1] - \alpha_2 y[n-2]$$



$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) -$$

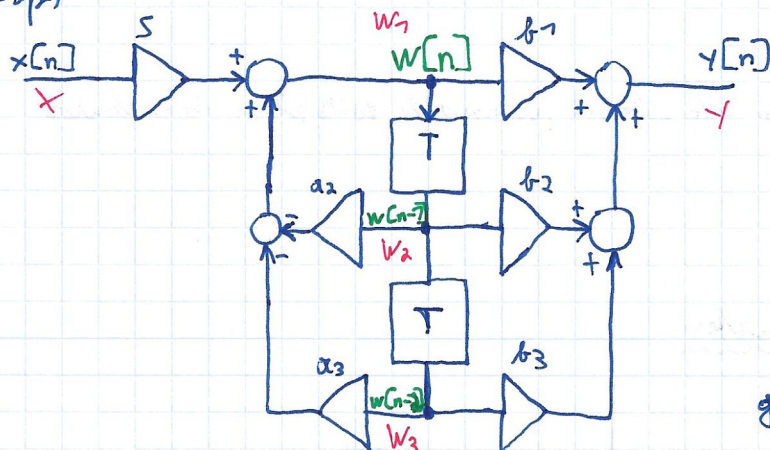
$$\alpha_1 z^{-1} Y(z) - \alpha_2 z^{-2} Y(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}$$

Kann instabil sein, ergibt niedrigere

Ordnung, niedrigerer Rechenaufwand

Bsp.)



erkennen:

IIR mit Rückkopplungen  $a_2, a_3$

$$f_0 = 48 \text{ kHz}$$

$$\Delta = 0,0039176$$

$$a_2 = -1,87534$$

$$a_3 = 0,831006$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 2$$

$$b_3 = 1$$

ges: Differenzenglg.

$H(z)$

Pol/Nullstellen - Frequenzen

Pol/Nullstellen, Pol/Null. - Diagramm

C-Code

Bodediagramm

$$w[n] = \Delta x[n] - a_2 w[n-1] - a_3 w[n-2]$$

$$y[n] = b_1 w[n] + b_2 w[n-1] + b_3 w[n-2]$$

$$W(z) = \Delta X(z) - a_2 z^{-1} W(z) - a_3 z^{-2} W(z)$$

$$Y(z) = b_1 W(z) + b_2 z^{-1} W(z) + b_3 z^{-2} W(z)$$

$$W(z) (1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2}) = \Delta X(z)$$

$$Y(z) = W(z) \cdot [b_1 + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-2}]$$

$$W(z) = \frac{\Delta X(z)}{1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\Delta (b_1 + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-2})}{1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{0,003916 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,87534 z^{-1} + 0,831006 z^{-2}}$$

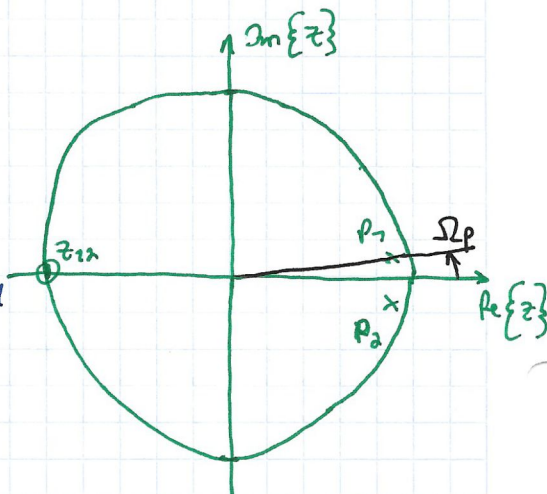
$$H(z) = \frac{0,003916 (z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1,87534z + 0,831006}$$

Pol:  $z^2 - 1,87534z + 0,831006 = 0$

$$p_{1,2} = 0,90077 \pm j0,0845 = 0,9116 \angle \pm 5,30^\circ$$

Nullst.:  $z^2 + 2z + 1 = 0$

$$z_{1,2} = -1 = 1 \angle \pi$$



$$\Omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_0} \quad f_p \dots \text{Polstellenfrequenz}$$

$$\Omega_p = 0,093 = 2\pi \frac{f_p}{48\text{kHz}} \rightarrow f_p = 770\text{Hz}$$

$$\Omega_{\text{NST}} = \pi = 2\pi \frac{f_{\text{NST}}}{f_0} \rightarrow f_{\text{NST}} = 24\text{kHz}$$

C-Code *note Vor. in BSB*

$$\text{float } x, y, w_1, w_2, w_3 = 0;$$

$$\text{float } \Delta = 0,003976; \alpha_2 = -1,87534; \alpha_3 = 0,837006;$$

$$b_1 = 1; b_2 = 2; b_3 = 1;$$

TP\_2\_Ord:

$x = \text{Eingang};$

$$w_1 = \Delta \cdot x - \alpha_2 \cdot w_2 - \alpha_3 \cdot w_3;$$

$$y = b_1 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + b_3 \cdot w_3;$$

$$w_3 = w_2; \quad \text{Wichtige Reihenfolge}$$

$$w_2 = w_1;$$

$$\text{Ausgang} = y;$$

Ende;