

HÖHERE TECHNISCHE BUNDESLEHRANSTALT HOLLABRUNN
Abteilung für Elektronik

Datum: 14. März 2016	Art der Leistungsfeststellung: 2. Schularbeit	Beispiel	Mögl. Punkte	Erreichte Punkte
Klasse: 5 BHELI	Angewandte Mathematik	1.)	10	10
Zeit: Vorbereitung + 100 Minuten	Benotung: 90 – 100: Sehr gut 76 – 89: Gut 63 – 75: Befriedigend 51 – 62: Genügend 0 – 50: Nicht genügend	2.)	15	14
Note: 2		3.)	15	9
		4.)	15	15
		5.)	15	11
		6.)	10	7
		7.)	20	18
Lehrer: M. Prochazka	Name d. Schülers : Graussam	Σ	100 P.	84

Zusätzliche Blätter sind nummeriert und mit dem Namen versehen in den Angabebogen einzulegen !

Zusätzliche Blätter: 1/1

ACHTEN SIE AUF EINE ORDENTLICHE DOKUMENTATION UND INTERPRETATION IHRER BERECHNUNGEN !

1.) Bei einer Tombola gewinnt jedes 3. Los.

a) Berechnen Sie wie viele Lose man kaufen muss, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer größer als 95% ist !

6P

$$0,05 = \frac{n!}{0!n!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$0,05 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$0,05 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$n = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(0,05) \approx 7,3$$

→ Man muss ~~min~~ 8 Lose kaufen.

b) Begründen Sie, warum die Binomialverteilung ein geeignetes Modell für diese Fragestellung ist !

2P

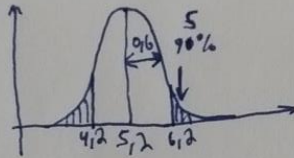
Da die Wahrscheinlichkeit auf einen Gewinn für jedes Los gleich bleibt. ~~1~~ und es nur 2 Mögl. gibt !

c) Interpretieren Sie in diesem Sachzusammenhang, welche Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Ausdruck berechnet wird:

$$\binom{15}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{11}$$

2P

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 15 gekauften Losen genau vier Treffer dabei sind, bei einer Trefferw. von 20% pro Los.



2.a) Der Treibstoffverbrauch einer bestimmten Autotype ist normalverteilt mit 5,2 Liter pro 100km und einer Standardabweichung von 0,6 Liter pro 100km.

-- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Schwankung von mehr als einem Liter pro 100km!

3P

$$P = 2 \cdot (1 - P(x = 6,2)) \approx 9,5\%$$

$$P(x = 6,2): z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 1,6$$

$$P(z = 1,6) \approx 0,9525$$

-- Geben Sie jenen Bereich an, in dem der Verbrauch von 90% dieser Type liegt!

4P

$$P(z = \frac{x - \mu}{\sigma}) = 90\%$$

$$y = \mu - (x - \mu)$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 1,65$$

$$y = 4,27$$

$$\frac{x - 5,2}{0,6} = 1,65$$

Der Bereich liegt zwischen 4,27 $\frac{L}{100km}$ und 6,19 $\frac{L}{100km}$

$$x = 6,19$$

2.b) Die Masse von Zementsäcken ist normalverteilt. Um die Abfüllanlage zu überprüfen, kontrolliert man einige Säcke, deren Füllmenge (in kg) beträgt:

24,998	25,036	25,081	24,973	25,023	25,027	25,062	24,091	25,104
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

-- Berechnen Sie die Standardabweichung, das arithmetische Mittel und den Median der gemessenen Abfüllmengen!

3P

arith. Mittel: $\bar{x} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{n} \rightarrow \text{Excel} \rightarrow \approx 24,9328$ kg

Median: $m = 25,027$ kg

Standardabw: $s \approx 0,3782$ kg (Excel) ** Einheiten!*

-- Ermitteln Sie das 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ .

eigentlich Stichprobe!

3P

$$\mu = 24,93$$

$$z(0,975) = 1,96$$

$$y = 24,93$$

$$\sigma = 0,32$$

$$z = \frac{x - 24,93}{0,32} = 1,96$$

$$y = 24,93$$

$$x \approx 25,56$$

$$24,3$$

$$25,56$$

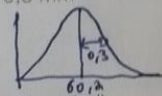
Konfidenzintervall liegt zw. 24,3 kg und 25,56 kg.

-- Erklären Sie, wie sich arithmetisches Mittel und Median verändern, wenn sich der größte Messwert ändert!

2P

AM: verändert sich, da der größte Wert mitgerechnet wird *bissl genauer*
Median: bleibt gleich *zu sicher möglich!*

- 3.) Auf einer Drehmaschine werden Stahlzylinder gefertigt. Die Durchmesser der Zylinder sind annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 60,2$ mm (Erwartungswert) und $\sigma = 0,3$ mm (Standardabweichung).



a) Bei einer Überprüfung wird ein Zylinder zufällig ausgewählt.

5

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser dieses Zylinders innerhalb eines Bereichs von $60,1$ mm $\pm 0,6$ mm liegt.

$$x = 60,7 \quad y = 59,5 \quad P_1(z = \frac{60,7 - 60,2}{0,3}) = 0,97525$$

$$(1 - P_2(z = \frac{59,5 - 60,2}{0,3})) = 0,9907$$

$$P_2 = 0,99\%$$

$$P = P_1 - P_2 \approx 94,26\%$$

b) Zur Qualitätskontrolle werden Stichproben vom Umfang $n = 5$ genommen. Die Mittelwerte der Durchmesser der Stichproben werden aufgezeichnet.

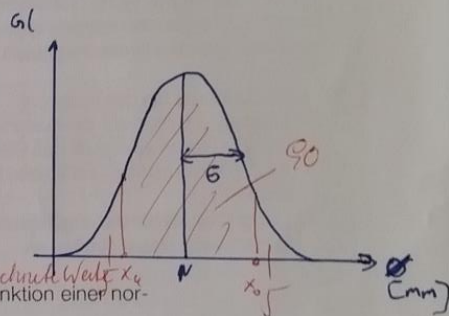
3 - Berechnen Sie denjenigen zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreuungsbereich, in dem erwartungsgemäß 90 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

3 - Veranschaulichen Sie mithilfe der Dichtefunktion diesen symmetrischen Zufallsstreuungsbereich und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

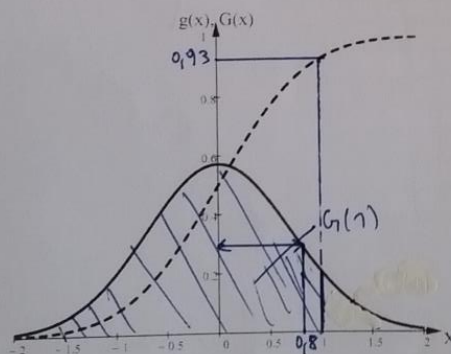
$$\bar{x} \pm \frac{G}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} \pm \frac{G}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} \pm \frac{G}{\sqrt{n}} = x \leq x$$



c) Das nachstehende Diagramm stellt die Dichte- und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariablen dar.



- 1 - Veranschaulichen Sie $G(1)$ mithilfe der Dichtefunktion im Diagramm.
- 1 - Lesen Sie $G(1)$ aus dem Diagramm ab. $\sim 0,93 = 93\%$
- 1 - Lesen Sie aus dem Diagramm die Standardabweichung σ ab. $\sigma \approx 0,8$
- 1 - Erklären Sie, warum sich die Verteilungsfunktion für $x \rightarrow \infty$ asymptotisch dem Wert 1 annähert.

Der 1 einer Wahrscheinlichkeit von 100% entspricht. Außerdem entspricht die Verteilungsfkt. dem Integral der Dichtefunktion und die Gesamtfläche unter der Dichtefkt. ist 1

- 4.) Die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt allgemein die harmonische Schwingung eines mathematischen Pendels.

A ... Amplitude in Metern (m)

T ... Zeitdauer in Sekunden (s), die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt

φ ... Phasenwinkel im Bogenmaß (rad)

$y(t)$... Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t in Metern (m)

ω ... Kreisfrequenz (s^{-1}), $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- a) - Ermitteln Sie die Funktion für die Geschwindigkeit v des harmonisch schwingenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t .
- Bestimmen Sie daraus allgemein den Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den Umkehrpunkt erreicht.

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = y'(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$0 = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0$$

$$\omega \left(\frac{3\pi}{\omega}\right) = 0$$

$$t_1 \omega + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = \frac{\pi/2 - \varphi}{\omega}$$

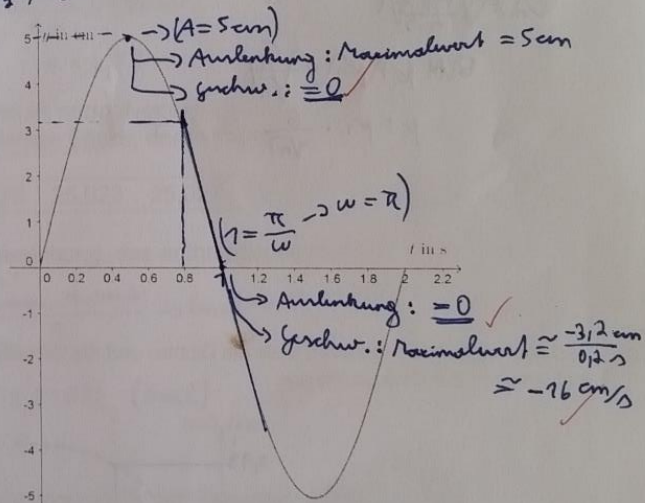
$$t_2 \omega + \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{3\pi/2 - \varphi}{\omega}$$

- b) Der zeitliche Verlauf der Auslenkung einer vollen Schwingung eines harmonisch schwingenden Pendels ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.

- 2 - Interpretieren Sie den Funktionsgraphen in Bezug auf die Auslenkung und die Geschwindigkeit des Pendels an den Extremstellen und an den Nullstellen.

- 2 - Geben Sie jeweils die ungefähren Zahlenwerte dieser Größen an.



- c) - Geben Sie für ein harmonisch schwingendes Pendel mit $A = 2$ cm, $\omega = 2$ s^{-1} und $\varphi = 0,5$ rad die lineare Näherung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ s an. Runden Sie die Parameter auf 3 Dezimalstellen.

- 1 - Berechnen Sie den relativen Fehler, der sich bei Berechnung der Auslenkung nach $t = 0,2$ s bei Verwendung dieser Näherung ergibt.

$$y(t) = 2 \sin(2t + 0,5) \rightarrow y(0) = 0,959 = d$$

$$y'(t) = 4 \cos(2t + 0,5) \rightarrow y'(0) = k = 3,570$$

$$y(0,2) = 1,567$$

$$y = kx + d$$

$$y_k = 3,570t + 0,959$$

$$y_k(0,2) = 1,667$$

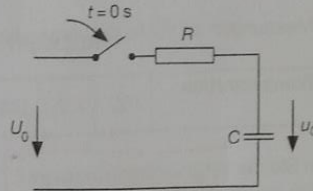
$$F = \frac{y_k(0,2) - y(0,2)}{y(0,2)} = \frac{1,667 - 1,567}{1,567} = 0,064 \approx 6,4\%$$

duhns fraußsam

- 5.) Durch eine Spannungsquelle mit der Nennspannung U_0 wird ein Kondensator mit der Kapazität C über einen Ohm'schen Widerstand R aufgeladen. Für die Ladung $q(t)$ gilt während des Ladevorgangs:

$$q(t) = C \cdot U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ mit } \tau = R \cdot C$$

$q(t)$... elektrische Ladung in Coulomb (C) zum Zeitpunkt t
 C ... Kapazität des Kondensators in Farad (F)
 U_0 ... angelegte Spannung in Volt (V)
 R ... Widerstand in Ohm (Ω)
 t ... Zeit in Sekunden (s)



- a) Die angegebene Funktion für die Ladung $q(t)$ des Kondensators während des Ladevorgangs kann mithilfe einer Differenzialgleichung ermittelt werden.

1 5 - Stellen Sie diese Differenzialgleichung ausgehend von der Gleichung $u_R(t) + u_C(t) = U_0$ auf.

$$u_R(t) + u_C(t) = U_0$$

$$R \cdot i(t) + u_C(t) = U_0$$

$$R C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_0$$

$$\tau \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = \frac{U_0}{C}$$

Ausgabe lesen!

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

- b) - Ermitteln Sie ausgehend von $q(t)$ die Funktionsgleichung für den Stromverlauf $i(t)$.

3 2 Stellen Sie die Funktion $i(t)$ für $U_0 = 45 \text{ V}$, $R = 150 \text{ k}\Omega$ und $C = 35 \text{ }\mu\text{F}$ grafisch dar.

$$q(t) = C \cdot U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

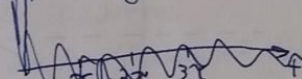
$$\tau = 5,25 \text{ s}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = 300 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0,19t}$$

$$= 300 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0,19t}$$

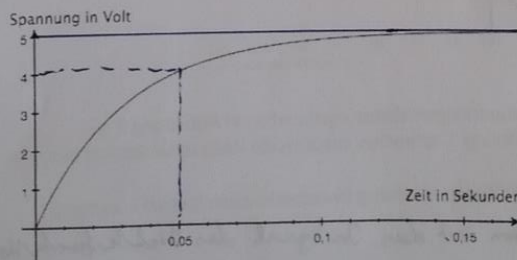
graf: Zettel



- c) Für die Kondensatorspannung $u_C(t)$ in Volt (V) gilt:

$$u_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

In der nachstehenden Abbildung ist diese Spannung für $R = 1 \text{ k}\Omega$ dargestellt.



$$u_C(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{nach } 0,05 \text{ s} \rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{5}$$

$$e^{-\frac{0,05}{1000 \cdot C}} = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{0,05}{1000 \cdot C} = \ln \frac{1}{5}$$

$$C \approx 37 \text{ }\mu\text{F}$$

- 2 - Begründen Sie anhand der Funktionsgleichung, warum sich die Spannung über dem Kondensator asymptotisch der angelegten Spannung U_0 nähert.

- 3 - Ermitteln Sie die Werte von U_0 und C mithilfe der Grafik.

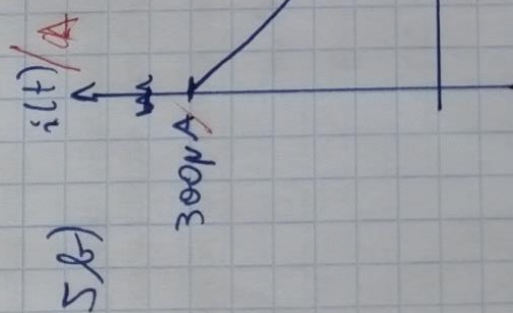
$$U_0 = 5 \text{ V}$$

Die e-Funktion geht gegen 0 $\rightarrow$ der Ausdruck in der Klammer gegen 1 $\rightarrow u_C(t)$ nähert sich U_0

$q(t)$... elektrische Ladung in Coulomb (C) zum Zeitpunkt t



Induktionsstrom



t/s



- 6.) Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m^3). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

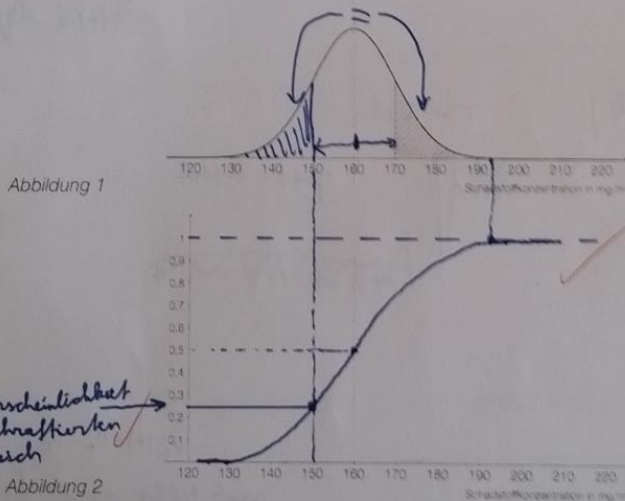
a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m^3	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$. *Excel $\rightarrow \bar{x} = 158,5 \text{ mg}/\text{m}^3$*
 2) Ermitteln Sie das 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ , wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 8,5 \text{ mg}/\text{m}^3$ beträgt.

Fehler "verdreht" $\mu = 158,5$
 $\sigma = 8,5$
Angabe lesen!
 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
 $z(P=0,975) = 1,96$
 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$
 $x = 202,76$
 Konfidenzintervall liegt zw. $168,84 \text{ mg}/\text{m}^3$ und $202,76 \text{ mg}/\text{m}^3$.

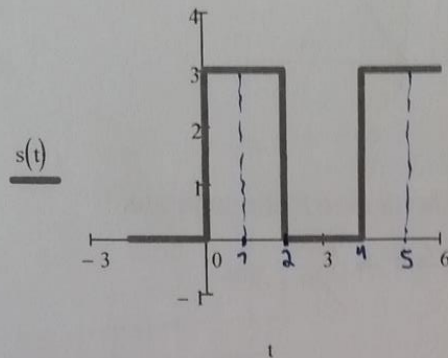
- b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.



- 1) Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein.
 1) Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
 2) Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.

Verteilungsfunktion ist das Integral der Dichtefunktion.

7. a) Gegeben ist folgender Graph einer reellen Funktion:



– Bestimmen Sie die Gleichung des Signals für eine Periodendauer T !

4 P

$$s_1(t) = 3 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2$$

$$s_2(t) = 0 \quad \text{für } 2 < t \leq 4$$

$$T = 4$$

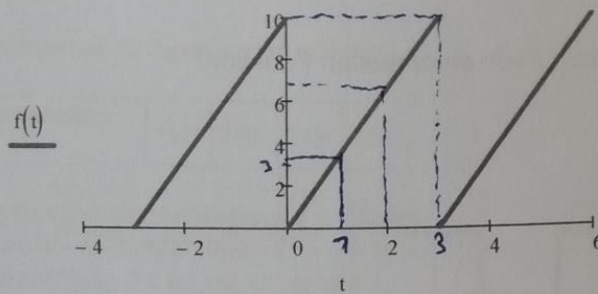
– Begründen Sie mit Hilfe der grafischen Darstellung, welche Bedeutung der Faktor a_0 in der Fourier-Analyse hat!

1 P

a_0 ist der Gleichanteil der Funktion.

In diesem Fall ist der Gleichanteil $a_0 = 1,5$.

7b)



– Bestimmen Sie die Gleichung des Signals für eine Periodendauer !

4 P

$$f(t) = \frac{10}{3}t \quad \text{für } 0 \leq t \leq 3$$

– Erklären Sie mit Hilfe der Eigenschaften von Funktionen, warum $a_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{R}$ gilt !

1 P

Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, welche um den Gleichanteil von 5 verschoben ist.

– Berechnen Sie die Koeffizienten b_n (allgemeine Formel)

7/8 P

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 \left(\frac{10}{3}t\right) \sin\left(n \frac{2\pi}{3} \cdot t\right) dt \rightarrow \text{Mathcad}$$

$$b_n = \frac{15 \sin(2\pi n) - 30\pi n \cos(2\pi n)}{3\pi^2 n^2} \Big|_0^3 = \frac{-10}{\pi n}$$

– Entwickeln Sie $f(t)$ in eine FOURIER-Reihe !

1/2 P

$$f(t) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{3} \cdot t\right) \right)$$

Je höher n , desto genauer die Funktion.

Zeichnung siehe Mathcad Ausdruck.

Zu Beispiel 7b)

$$\frac{2}{3} \cdot \int_0^3 \left(\frac{10}{3} \cdot t_1 \right) \cdot \sin \left(n \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot t_1 \right) dt_1 \rightarrow \frac{15 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n) - 30 \cdot \pi \cdot n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n)}{3 \cdot \pi^2 \cdot n^2}$$

$$b(n) := \frac{\overbrace{15 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n)}^{=0} - 30 \cdot \pi \cdot n \cdot \overbrace{\cos(2 \cdot \pi \cdot n)}^1}{3 \cdot \pi^2 \cdot n^2} = -\frac{10}{\pi \cdot n} \quad !$$

$$f(t_2) := 5 + \sum_{n=1}^{40} \left(b(n) \cdot \sin \left(n \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t_2 \right) \right) \quad \checkmark = -5 + \dots$$

