

HÖHERE TECHNISCHE BUNDESLEHRANSTALT HOLLABRUNN

Höhere Abteilung für Elektronik und Technische Informatik

Datum: 12.11.2015	Art der Leistungsfeststellung: 1. Schularbeit		Wertung	Bewertung
Klasse: 5 BHEL	Gegenstand: Angewandte Mathematik	1)	10	10
		2)	10	8
Zeit: 100min	Note: 90 - 100 Sehr gut 76 - 89 Gut 63 - 75 Befriedigend 51 - 62 Genügend 0 - 50 Nicht Genügend 2	3)	10	10
		4)	10	5
		5)	20	20
		6)	30	27
Lehrer: M.Prochazka	Name: Gausmann	Σ	90/100	80 = 88,8%

Anzahl der zusätzlich abgegebenen Blätter: 2

Diese Schularbeit wird mit Unterstützung von Mathcad durchgeführt.

Loggen Sie sich mit dem zugeteilten Seminaraccount (= Passwort) ein.
Kopieren Sie Ihre Berechnungen/ Zeichnungen zwischen durch auf Q in den Ordner 5BHEL.

Sämtliche Ausdrucke/Zusatzzettel müssen mit dem NAMEN versehen sein!

ACHTEN SIE AUF EINE ORDENTLICHE DOKUMENTATION UND INTERPRETATION IHRER BERECHNUNGEN !

- 1.) In einer Schachtel befinden sich drei Widerstände zu 150Ω, fünf Widerstände zu 200Ω und zwei Widerstände zu 500Ω. Sie sind äußerlich in Form und Größe nicht unterscheidbar. Jemand entnimmt "blind" drei Widerstände.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nur Widerstände mit 200Ω zu erwischen? *ang. 3+5+2 Wider = 10Wider*

$$P_1 = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12} = 8,3\%$$

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Widerstand mit 150Ω unter den entnommenen ist?

2. 24 7 ohne HÜ; 17 mit HÜ 5 herausgenommen

- 2.) Unter den 24 Schülern eines Jahrgangs sind sieben, die ihre Hausübung nicht gemacht haben.

Fünf Schüler werden nun zufällig zur Kontrolle der HÜ aufgerufen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) alle die HÜ gemacht haben,

$$m = \binom{24}{5} = \frac{24!}{5! 19!} = 42504$$

$$g = \binom{17}{5} = \frac{17!}{5! 12!} = 6188$$

$$p = \frac{g}{m} \approx 14,56\%$$

- b) höchstens zwei die HÜ nicht gemacht haben!

$$g = \binom{17}{4} \binom{7}{1} + \binom{17}{3} \binom{7}{2} + \binom{17}{2} \binom{7}{3} = \frac{17!}{4! 13!} \frac{7!}{1! 6!} + \frac{17!}{3! 14!} \frac{7!}{2! 5!} + \frac{17!}{5! 12!} = 23549$$

$$p = \frac{g}{m} = \frac{23549}{42504} \approx 55,4\%$$

- 3.) Wie oft muss eine Münze geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Mal "Zahl" kommt, unter ein Zehntel Promille sinkt?

$$p_{\text{bei 1 Wurf}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} 1\% \dots 0,01 \\ 10\% \dots 0,1 \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,00001$$

$$\text{Ans} = \log_{0,5}(0,00001) = 13,28$$

14

14 Würfe sind notw.

- 4.) Einem Kandidaten werden bei einer Prüfung 10 Fragen in einem Pool vorgelegt.

- a) Er darf 3 Fragen ziehen. Berechnen Sie die Anzahl der Wahlmöglichkeiten!

$$m = \frac{10!}{3! 7!} = 120$$

- b) Er darf 3 Fragen ziehen, aber es müssen 2 aus den ersten 5 Fragen gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten hat er?

$$m_1 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = 10$$

$$m_2 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1! 4!} = 5$$

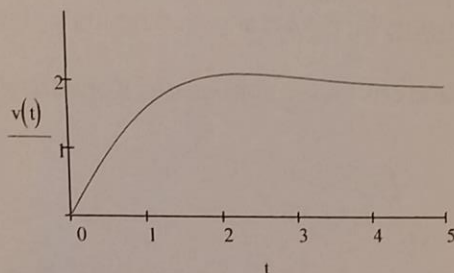
$$m = m_1 + m_2 = 10 + 5 = 15$$

$$\text{DF! } \binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{5}{3}$$

5.) Die Geschwindigkeit eines Wagens in Bewegung lässt sich durch die Funktion

$$v(t) := 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{s}} \cdot \cos\left(\frac{t}{s}\right) \right) \quad \text{in m/s beschreiben.}$$

Das Diagramm für den Verlauf der Geschwindigkeit hat folgendes Aussehen



Ermitteln Sie die Formel für die Berechnung des zurückgelegten Weges $s(t)$!
Anfangsbedingung $s(0) = 0$! **Hinweis:** $v = ds/dt$

$$v(t) = 2(1 - e^{-t} \cos(t)) \quad s(t) = ?$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = 2(1 - e^{-t} \cos(t))$$

$$ds = (2 - 2e^{-t} \cos(t)) dt =$$

$$s = 2t - 2 \int e^{-t} \cos(t) dt = 2t + e^{-t} (\cos(t) - \sin(t))$$

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} u = \cos t \quad v' = e^{-t} \\ u' = -\sin t \quad v = -e^{-t} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} u = \sin t \quad v' = e^{-t} \\ u' = \cos t \quad v = -e^{-t} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\text{NR: } \int e^{-t} \cos t dt = -\cos t e^{-t} - \int \sin t e^{-t} dt = -\cos t e^{-t} + \sin t e^{-t} - \int \cos t e^{-t} dt$$

$$2 \int e^{-t} \cos t dt = -\cos t e^{-t} + \sin t e^{-t}$$

$$\int e^{-t} \cos t dt = \frac{e^{-t}}{2} (\sin t - \cos t)$$

6.) Ein **RC-Glied** wird an eine Batterie mit der konstanten Spannung U_e angeschlossen.. Dabei wird der Kondensator aufgeladen.

a) - **Stellen** Sie die zugehörige Differentialgleichung für die Spannung $u_c(t)$ am Kondensator auf.

- **Dokumentieren** Sie wie man diese mithilfe der Methode **Trennung der Variablen** lösen kann!

- Geben Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $u_c(t=0s) = 0 \text{ V}$ an!

Für die Stromstärke gilt während des Ladevorgangs des Kondensators folgende Funktion:

$$i(t) = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{T}} \quad \text{mit } T = R \cdot C$$

b) Stellen Sie den Graphen dieser Funktion für ein RC-Glied mit folgenden Größen dar: $I_0 = 0,5 \text{ A}$ $R = 30 \text{ k}\Omega$ und $C = 470 \text{ nF}$

- **Entnehmen** Sie der Grafik wann der Ladestrom auf die Hälfte des Anfangswertes gesunken ist.

- **Schätzen** Sie ab, nach welcher Zeit der Kondensator vollständig ~~ent~~laden ist.

- **Überprüfen** Sie diese Werte durch Berechnung !

c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Stromkurve für $t = 30 \text{ ms}$!

d) Die im geladenen Kondensator **gespeicherte Energie** kann mittels Integralrechnung bestimmt werden.

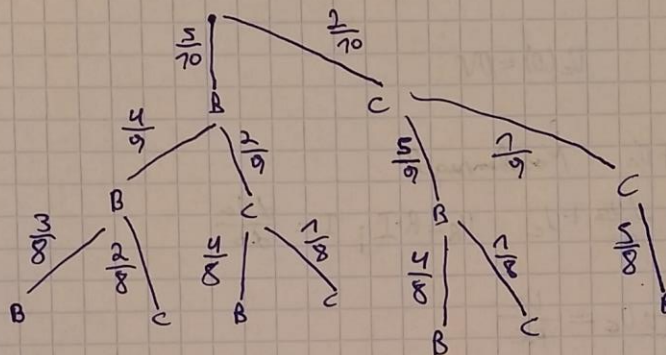
$$E = \int_0^{\infty} R \cdot i^2(t) dt$$

Berechnen Sie dieses Integral allgemein (d.h. OHNE Zahlenwerte) und geben Sie eine möglichst einfache Formel für diese Energie an !

Growth rate

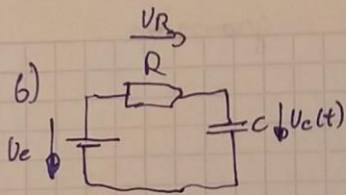
7b)

A $\frac{150}{3\frac{1}{2}\%$ B $\frac{200}{5\frac{1}{2}\%$ C $\frac{500}{2\frac{1}{2}\%$



$$P_2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8}$$

$$P_2 = \frac{7}{24} \approx 29,2\%$$



Dokumentation in Grün

a) $U_c(t) = ?$ $U_c(0) = 0V$

$U_e = U_R + U_c$ Maschenregel

$U_e = RC \frac{dU_c}{dt} + U_c$ $U_R = R \cdot I$; $I = \frac{dU_c}{dt}$

DGL: $\dot{U}_c + \frac{1}{RC} U_c = \frac{U_e}{RC}$ ✓

homogene Lösung ermitteln: $\dot{U}_c + \frac{1}{RC} U_c = 0$ $\ln|U_c| = -\frac{1}{RC} t + k$
 $\frac{dU_c}{dt} = -\frac{1}{RC} U_c$ $U_{c, \text{hom}} = k e^{-\frac{1}{RC} t} = k e^{-\frac{1}{RC} t}$ ✓
 $\frac{1}{U_c} dU_c = -\frac{1}{RC} dt$

partikuläre Lösung ermitteln: $U_{c,p} = k(t) e^{-\frac{1}{RC} t}$
 $\dot{U}_{c,p} = k'(t) e^{-\frac{1}{RC} t} - \frac{1}{RC} k(t) e^{-\frac{1}{RC} t}$
 * Methode verwendet?

in DGL einsetzen: $k'(t) e^{-\frac{1}{RC} t} = \frac{U_e}{RC}$

$k(t)$ ermitteln: $k'(t) = \frac{U_e}{RC} e^{+\frac{1}{RC} t}$

$k(t) = +U_e e^{+\frac{1}{RC} t}$

$\rightarrow U_{c,p} = U_e$ ✓

allg.: Lösung: $U_c(t) = U_e + k e^{-\frac{1}{RC} t}$ ✓

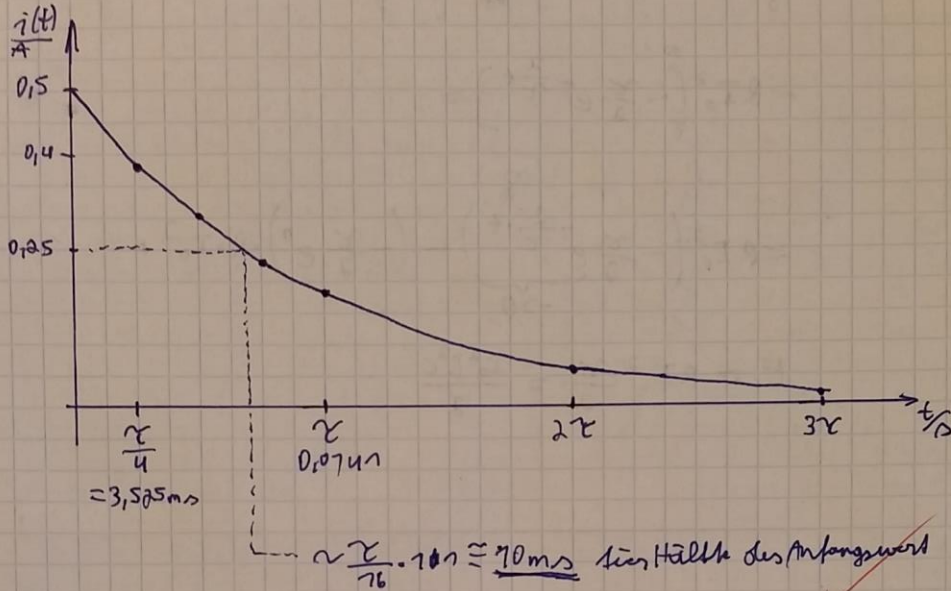
Anfangsbed: $0 = U_e + k \cdot 1 \Rightarrow k = -U_e$ ✓

spezielle Lsg.: $U_c(t) = U_e - U_e e^{-\frac{1}{RC} t}$ ✓

Graumann

b) $i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

Graph mit $I_0 = 0,5A$; $R = 30k\Omega$, $C = 470nF \rightarrow \tau = 0,0141s$ ✓



Überprüfung: $0,25 = 0,5e^{-\frac{1}{0,0141}t}$

$$-\frac{1}{0,0141}t = \ln\left(\frac{0,25}{0,5}\right)$$

$$t \approx 9,77ms$$
 ✓

✓ vollständige
(Entladung!)

c) Tangente $t = 30ms$ Wert: $i(0,03) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} \approx 0,05956A$ ✓

Steigung: $i'(t) = -\frac{1}{RC}I_0e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$i'(0,03) \approx -4,22 \frac{A}{s} \approx -0,0595 \frac{A}{\tau}$$

$$i_T = k \cdot t + d$$

$$i_{Tangente} = -4,22t + d$$

d Berechnen: $0,05956 = -4,22 \cdot 0,03 + d$

$$d \approx 0,1786$$

$$i_{Tangente} = -4,22t + 0,1786$$
 ✓

d)

$$E = \int_0^{\infty} R i(t)^2 dt =$$

$$= \int_0^{\infty} R \left(I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt =$$

$$= R I_0^2 \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{\infty} =$$

mf! limit $\downarrow$

$$= R I_0^2 \left(\underbrace{-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2}{\tau} \cdot t}}_{\rightarrow 0} \right) - \left(-\frac{\tau}{2} e^0 \right) \cdot R \cdot I_0^2 =$$

$$E = R I_0^2 \frac{\tau}{2} = \frac{I_0^2 R^2 C}{2}$$