

7. Regelungstechnik

Steuerungstechnik

Regelungstechnik

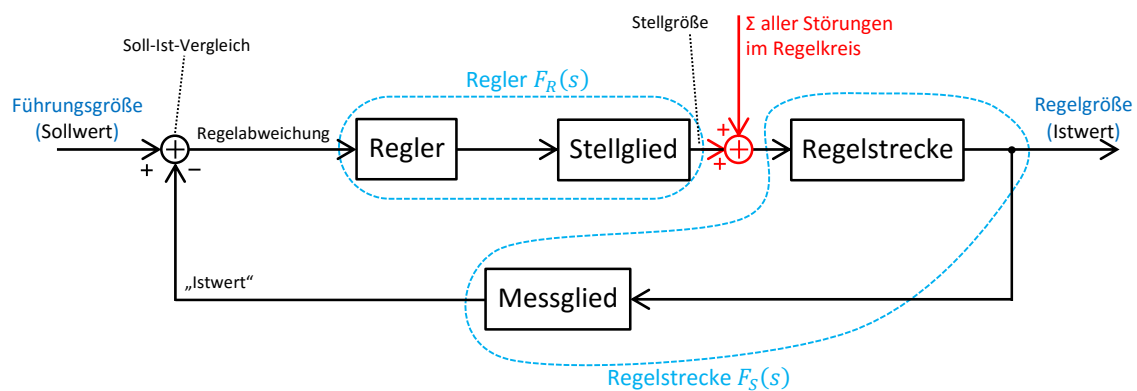
mit analogem Regler

mit digitalem Regler

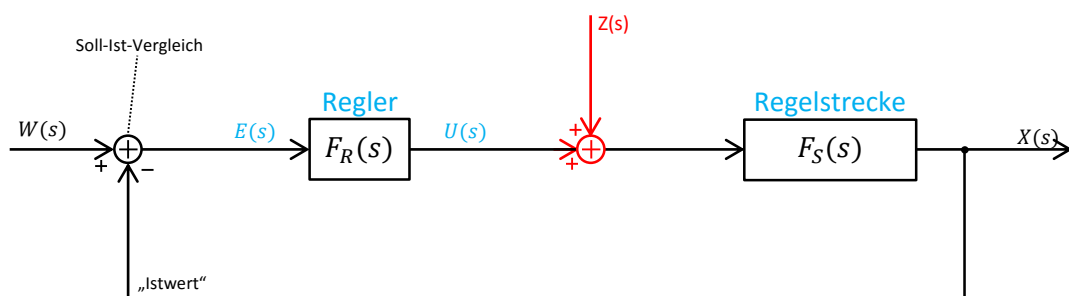
7.1. Standardregelkreis

(Haager S.53)

Blockschaltbild: allgemeiner einschleifiger Regelkreis



Blockschaltbild: einfacher einschleifiger geschlossener Regelkreis



Anmerkung: $F_R(s) \rightarrow s = \sigma + j\omega$ $\sigma = 0 \rightarrow F_R(j\omega)$

$W(s)$ Führungsgröße (Sollwert)

$X(s)$ Istwert der Regelung

$F_r(s)$ Übertragungsfunktion der Zusammenfassung von Regler und Stellglied

Der Regler hat die Aufgabe, basierend auf der Regelabweichung ein Ausgangssignal zu erzeugen, mit dem die Regelstrecke wirksam beeinflusst wird und dadurch die Regelabweichung verschwindet.

$F_s(s)$ ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke (Regelstrecke + Messglied)

$E(s)$ Regelabweichung, Ausgangssignal des Soll-Ist-Vergleichs

$U(s)$ Stellgröße, Signal zur wirksamen Beeinflussung der Regelstrecke

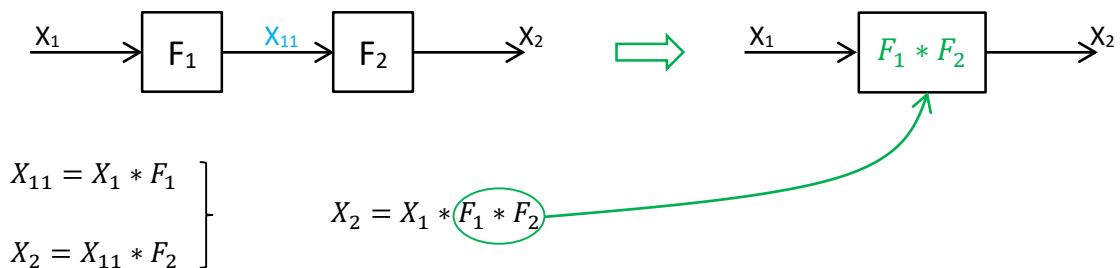
$Z(s)$ Summe aller im Regelkreis vorkommenden Störgrößen an einem Punkt zusammengefasst

7.2. Vereinfachung von allgemeinen Regelkreisen

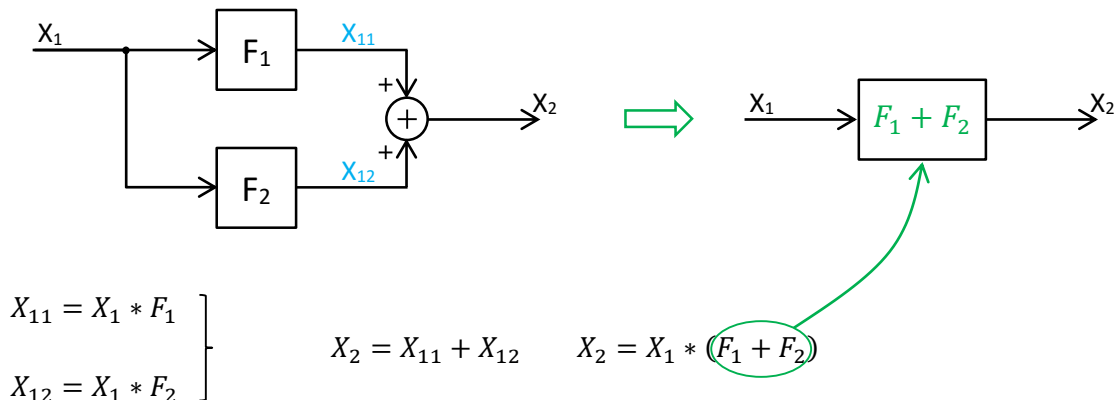
- Alle Größen / Zwischengrößen benennen, Gleichungssystem (Matrizzen) aufstellen + lösen
- Grafische Lösung + Algebra der Übertragungsfunktionen

7.2.1. Algebra der Übertragungsfunktionen

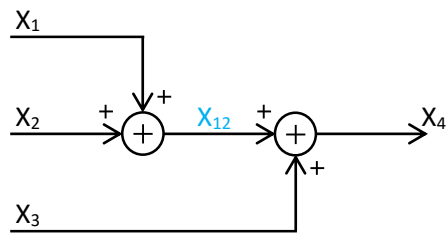
- Serienschaltung:



- Parallelschaltung:

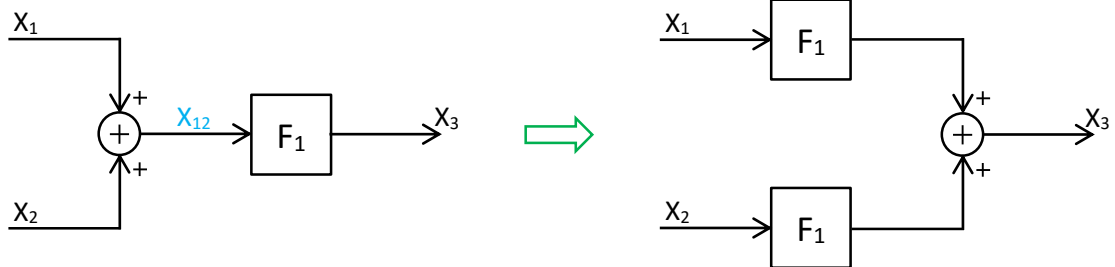


- Mischstellen:

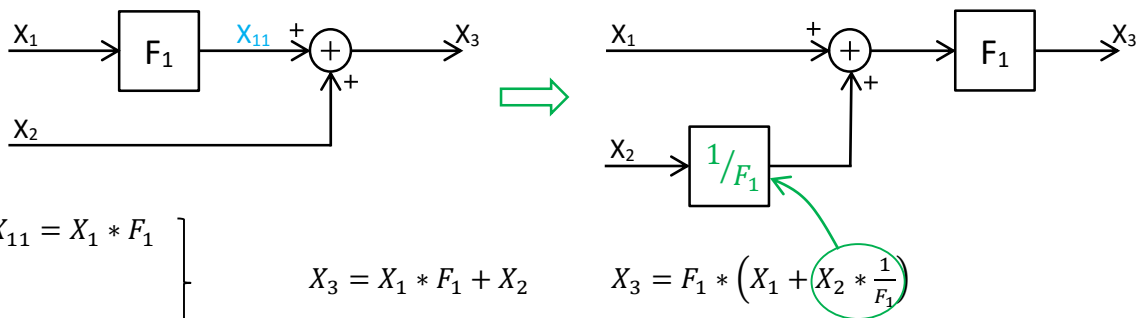


$$\left. \begin{array}{l} X_{12} = X_1 + X_2 \\ X_4 = X_3 + X_{12} \end{array} \right\} \quad X_4 = X_1 + X_2 + X_3 \quad X_4 = (X_1 + X_2) + X_3$$

- Verschieben einer Mischstelle:

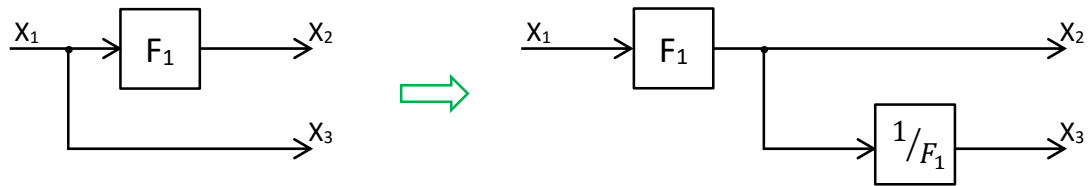


$$\left. \begin{array}{l} X_{12} = X_1 + X_2 \\ X_3 = X_{12} * F_1 \end{array} \right\} \quad X_3 = (X_1 + X_2) * F_1 \quad X_3 = X_1 * F_1 + X_2 * F_1$$

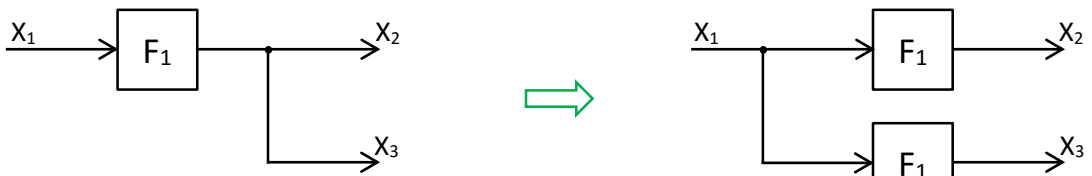


$$\left. \begin{array}{l} X_{11} = X_1 * F_1 \\ X_3 = X_2 + X_{11} \end{array} \right\} \quad X_3 = X_1 * F_1 + X_2 \quad X_3 = F_1 * \left(X_1 + X_2 * \frac{1}{F_1} \right)$$

- Verschieben von Verzweigungsstellen:

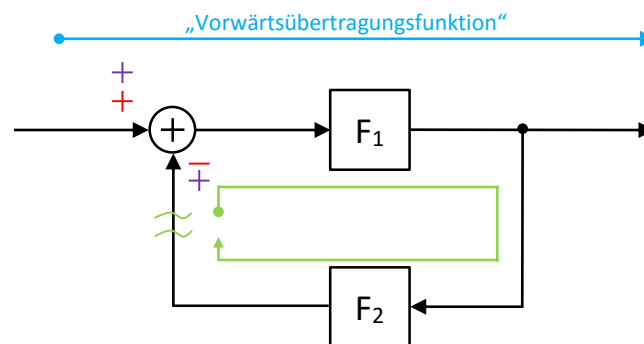


$$\left. \begin{array}{l} X_2 = X_1 * F_1 \\ X_3 = X_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_2 = X_1 * F_1 \\ X_3 = X_1 * F_1 * \frac{1}{F_1} \end{array}$$



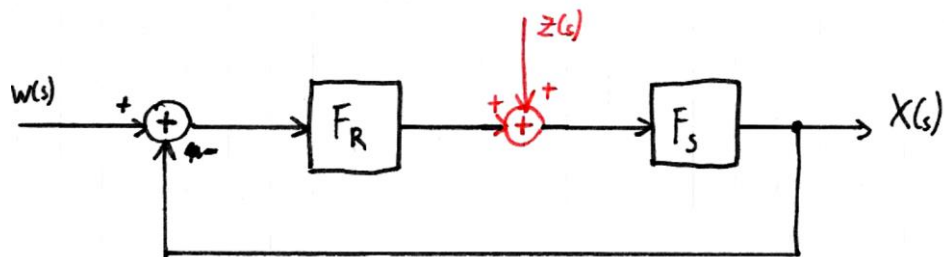
$$X_2 = X_1 * F_1$$

$$X_3 = X_1 * F_1$$

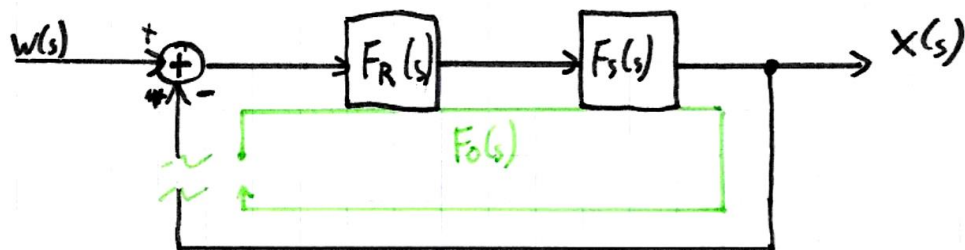


$$F = \frac{\text{"Vorwärtsübertragungsfunktion"}}{1 \pm \text{"Schleifenübertragungsfunktion"}} = \frac{F_1}{1 \pm F_1 * F_2}$$

7.3. Charakteristische Übertragungsfunktion / Analyse Regelkreis



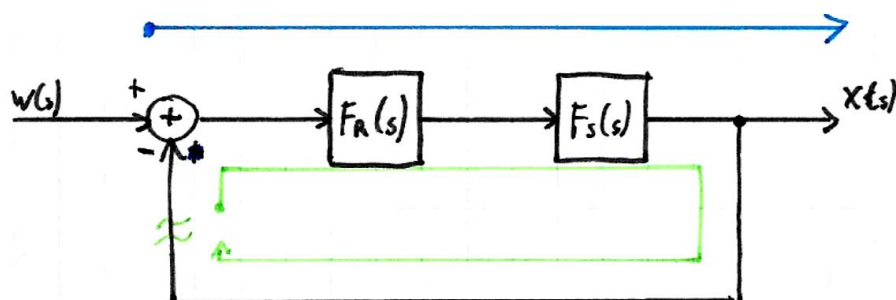
- Schleifenverstärkung / Schleifenübertragungsfunktion $F_O(s)$



$$Z(s) = \emptyset$$

$$F_O = F_R(s) * F_S(s)$$

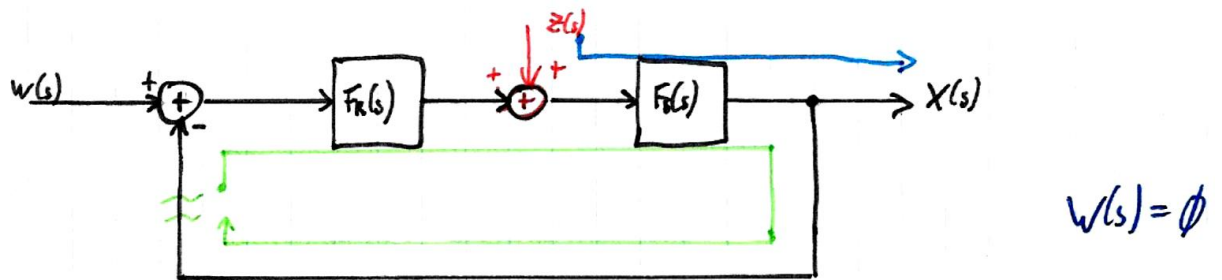
- Führungsübertragungsfunktion $F_W(s)$



$$Z(s) = \emptyset$$

$$F_W(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{\text{"Vorwärtsübertragungsfunktion"}}{1 + \text{"Schleifenübertragungsfunktion"}} = \frac{F_R(s)F_S(s)}{1 + F_R(s)F_S(s)} = \frac{F_O(s)}{1 + F_O(s)}$$

- Störungsübertragungsfunktion $F_Z(s)$



$$F_Z(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{\text{"Vorwärtsübertragungsfunktion"}}{1 + \text{"Schleifenübertragungsfunktion"}} = \frac{F_S(s)}{1 + F_R(s)F_S(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_O(s)}$$

Gilt für Regelkreis: kausal, LTI -> Überlagerungsprinzip

$$\rightarrow X(s) = W(s) * F_W(s) + Z(s) * F_Z(s)$$

7.4. Regeltechnische Grundglieder

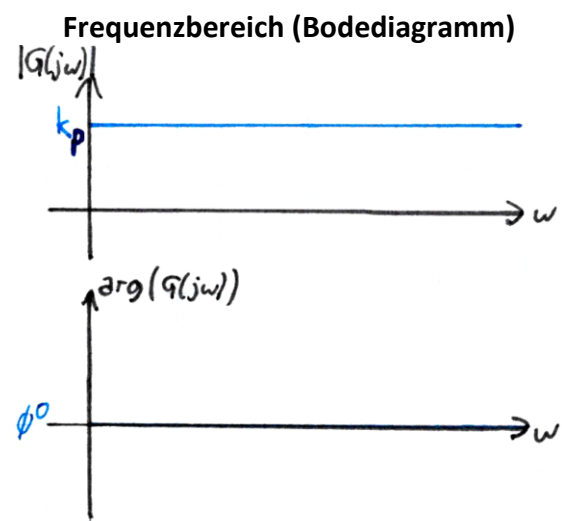
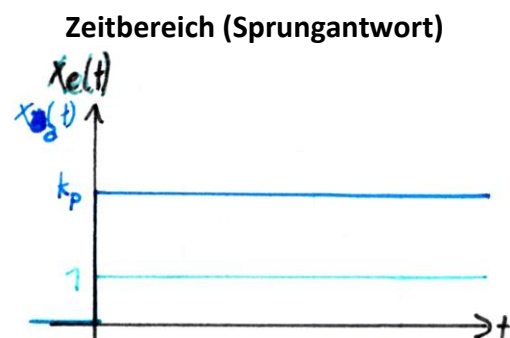
(Haager Seite 57)

7.4.1. Proportionalglied (P-Glied, P-Element)

$$x_a(t) = k_p * x_e(t)$$

$$X_a(s) = k_p * X_e(s)$$

$$G(s) = k_p$$

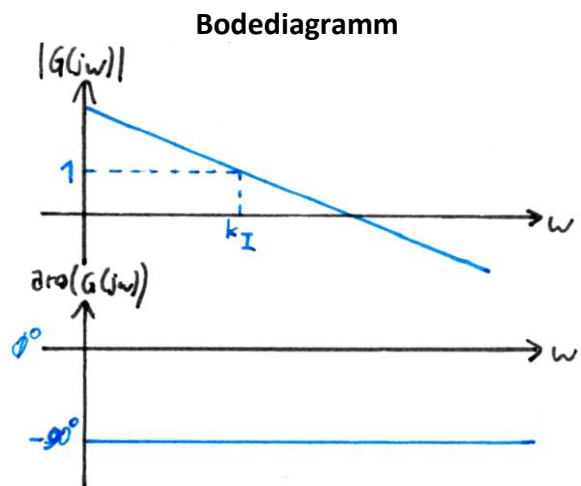
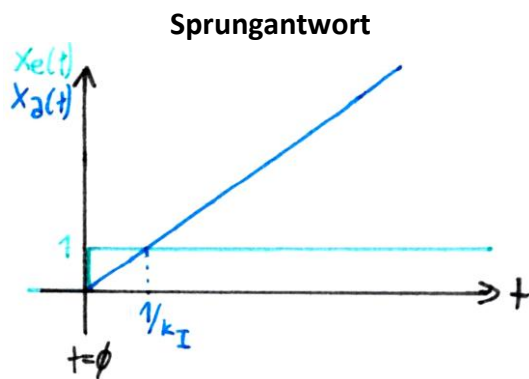


7.4.2. Integrierglied (I-Glied, I-Element)

$$x_a(t) = k_I * \int_0^t x_e(\tau) * d\tau$$

$$X_a(s) = k_I * \frac{X_e(s)}{s}$$

$$G(s) = \frac{k_I}{s} \quad [k_I] = \text{sec}^{-1}$$

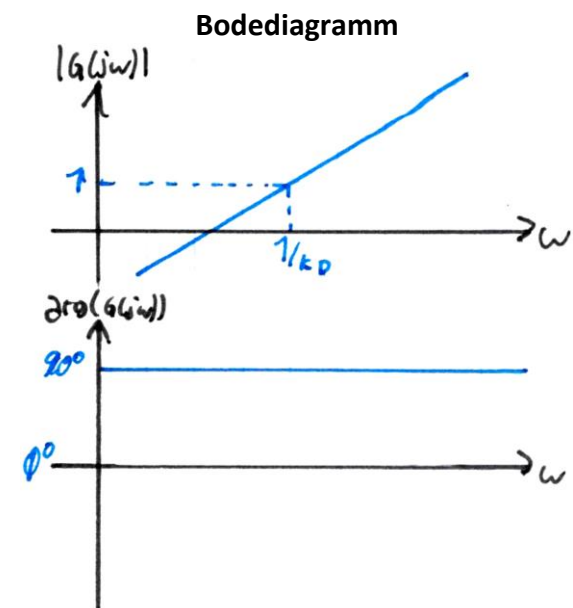
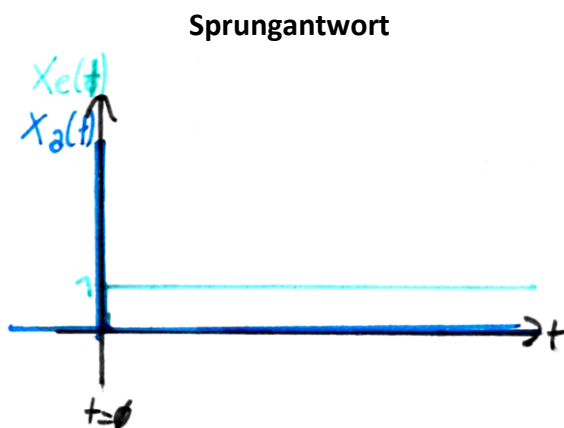


7.4.3. Differentialglied (D-Glied, D-Element)

$$x_a(t) = k_D * \frac{dx_e(t)}{dt}$$

$$X_a(s) = k_D * s * X_e(s)$$

$$G(s) = k_D * s \quad [k_D] = \text{sec}$$



7.4.4. Verzögerungsglied erster Ordnung (PT₁-Glieder)

$$x_a(t) + T * \frac{dx_a(t)}{dt} = k * x_e(t)$$

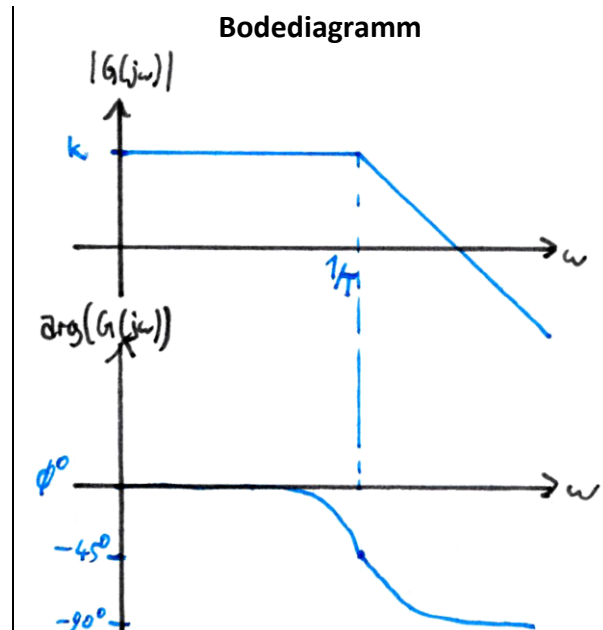
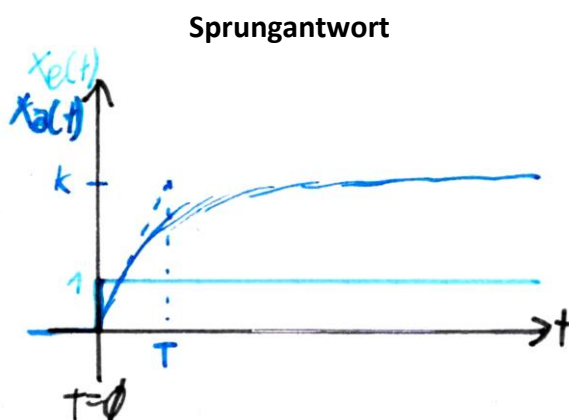
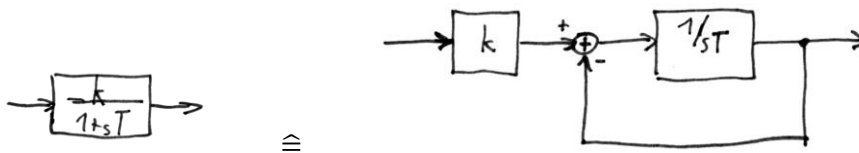
$$X_a(s) + T * s * X_a(s) = k * X_e(s)$$

$$X_a(s) = X_e(s) * \frac{k}{1 + sT}$$

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT}$$

$$[k] = 1$$

$$[T] = \text{sec}$$



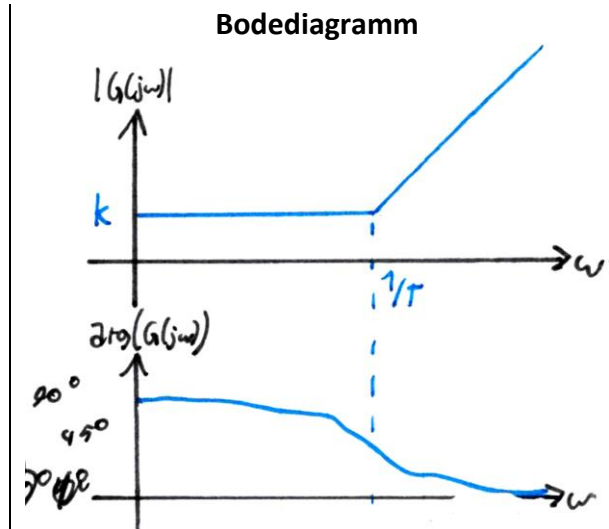
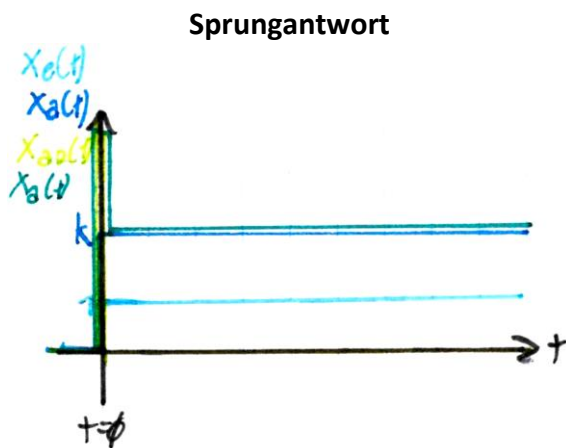
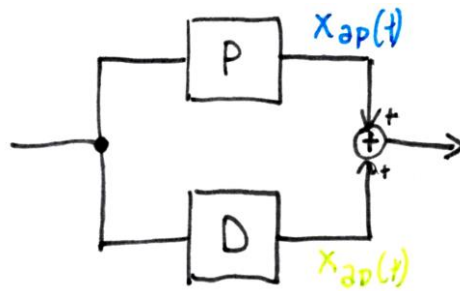
7.4.5. PD-Element

$$x_a(t) = k * x_e(t) + k * T \frac{dx_e(t)}{dt}$$

$$X_a(s) = k * X_e(s) + k * T * s * X_e(s)$$

$$X_a(s) = X_e(s) * k * (1 + sT)$$

$$G(s) = k * (1 + sT)$$

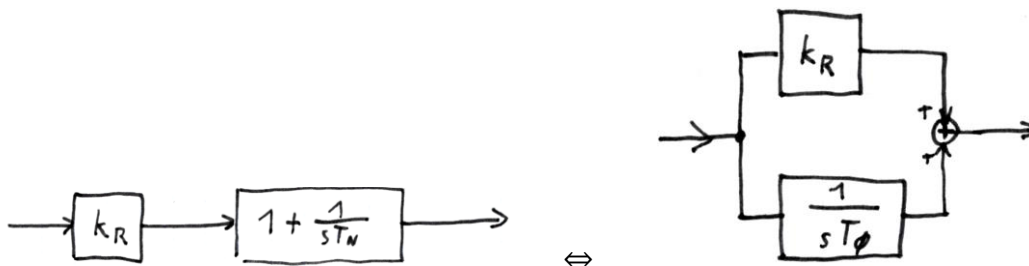


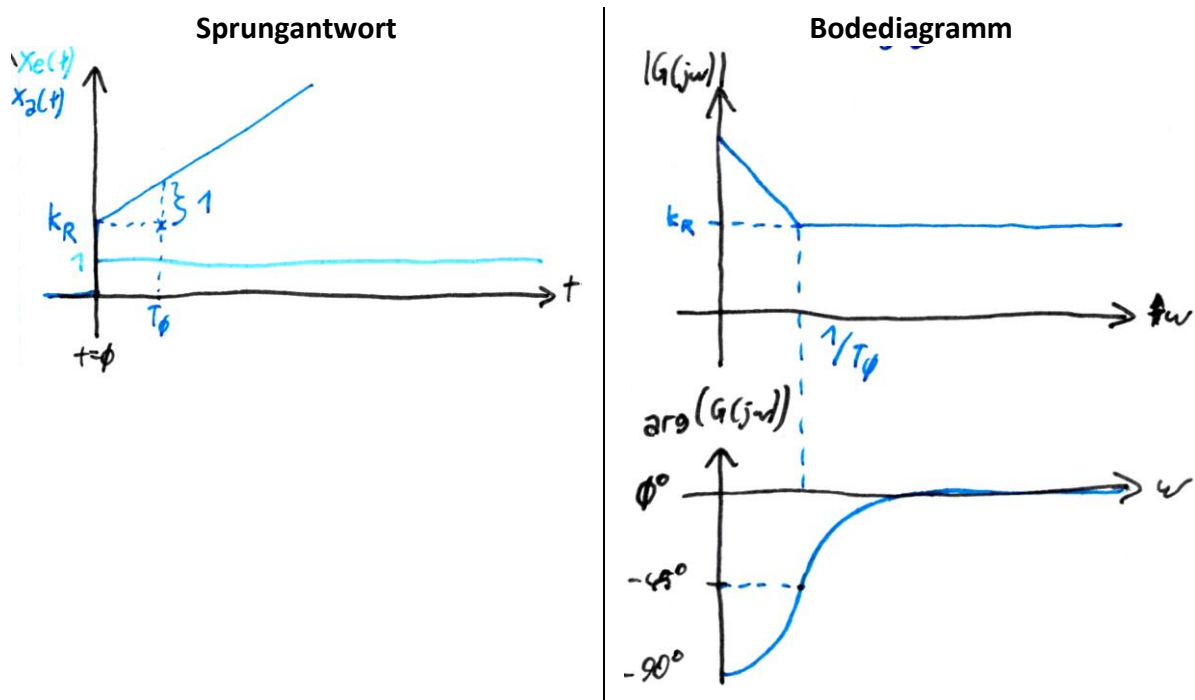
7.4.6. PI-Element

$$x_a(t) = k_R \left[x_e(t) + \frac{1}{T_N} \int_{t=0}^t x_e(\tau) d\tau \right]$$

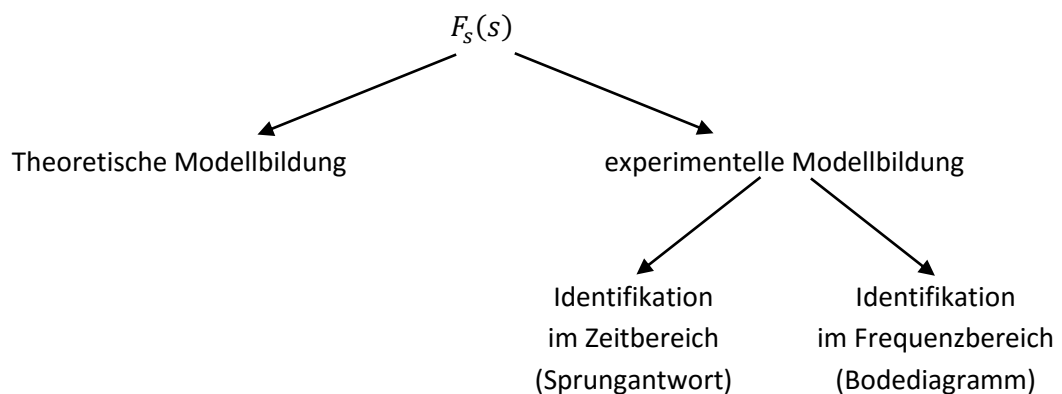
$$X_a(s) = k_R \left[X_e(s) + \frac{1}{T_N} \cdot \frac{X_e(s)}{s} \right]$$

$$G(s) = k_R * \left(1 + \frac{1}{s T_N} \right)$$





7.5. Regeltechnische Grundglieder



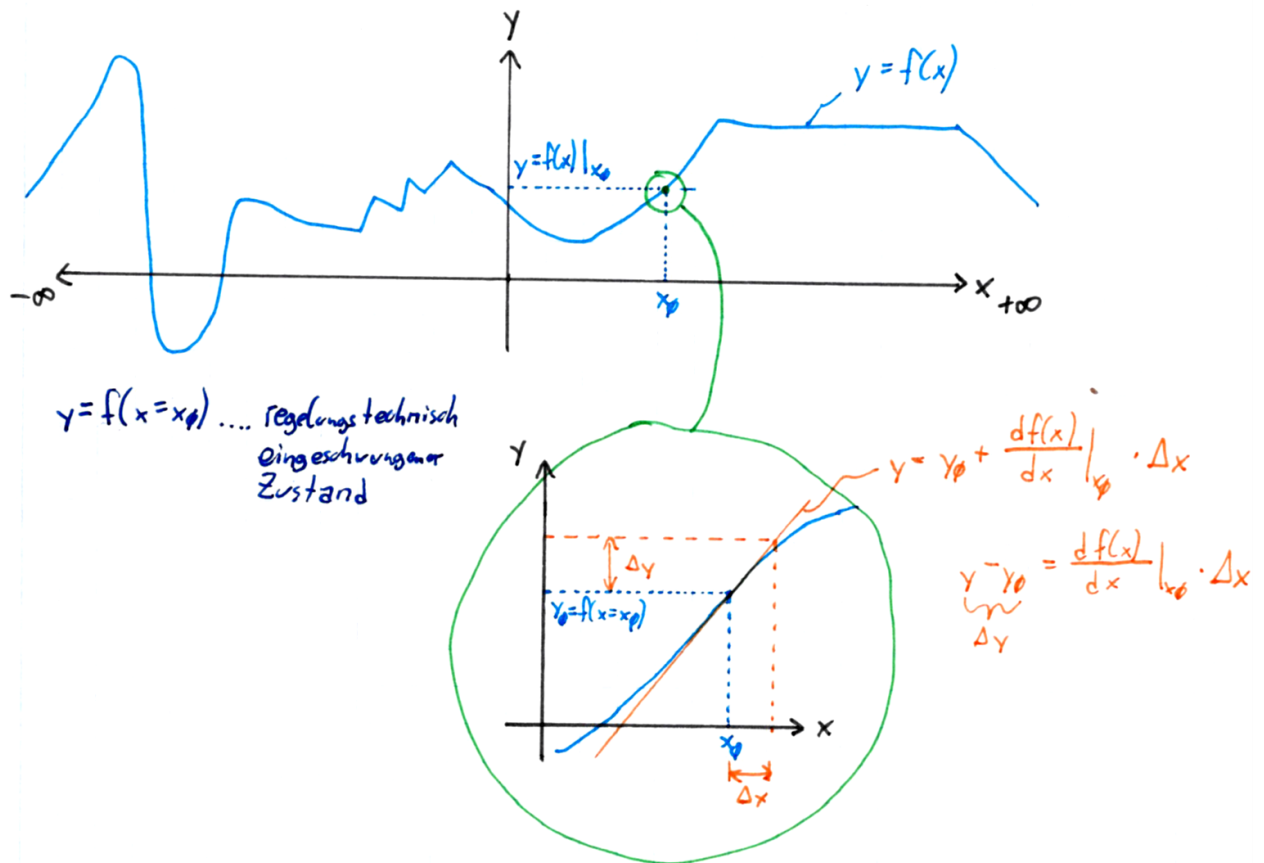
Theoretische Modellbildung:

Voraussetzungen:

- Kenntnisse der physikalischen Zusammenhänge
 - Alle Abhängigkeiten
 - Einflussgrößen + Wirkung
- für Systeme:
- elektrische Systeme
 - mechanische Systeme
 - elektromechanische Systeme

Differentialgleichungssystem -> lösen (mathematisch)

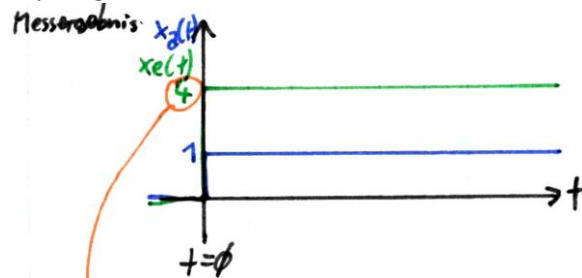
Lösung -> linearisieren (Kurve -> Tangente) (eingeschränkt auf technisch sinnvoll / möglich)



Experimentelle Modellbildung

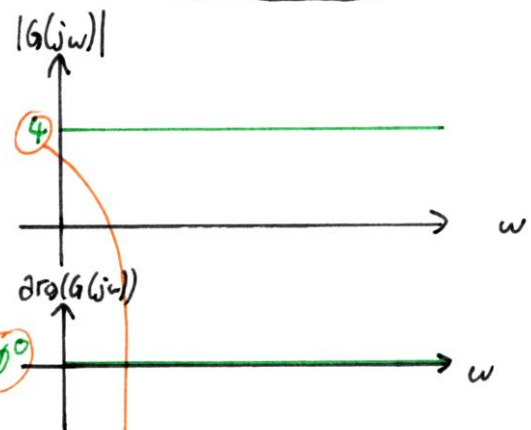
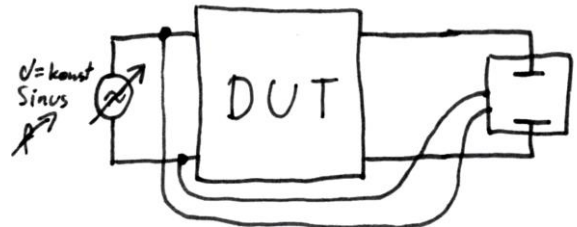
Identifikation im Zeitbereich

„Sprungantwort messen“

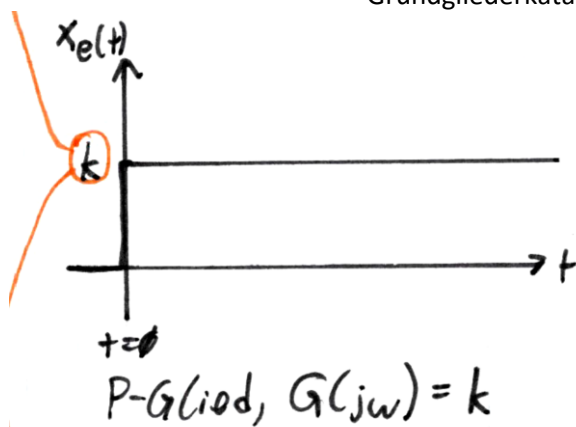


Identifikation im Frequenzbereich

„Bode-Diagramm messen“

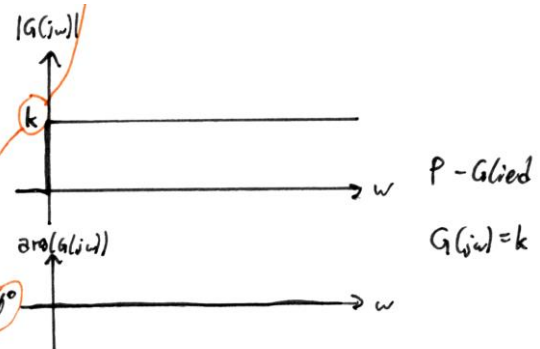


Grundgliederkatalog: „schaut aus wie ...“



Parametrisieren:

$$k = 4$$

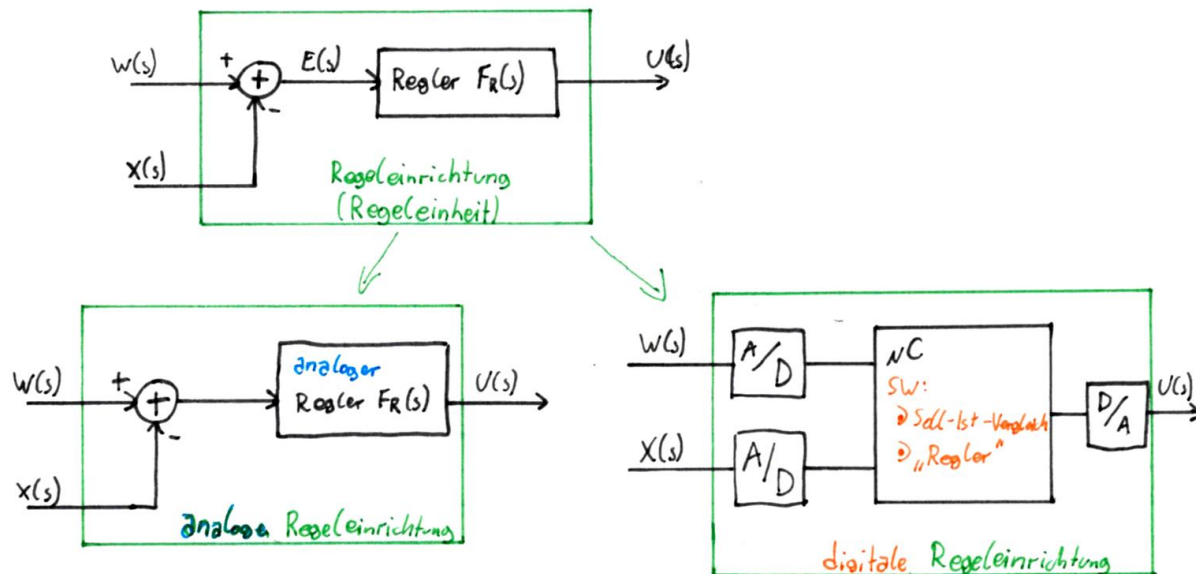


Parametrisieren:

$$k = 4$$

$$G(jw) = 4$$

7.6. Der Regler



Analoger Regler
Gegengekoppelte OPV-Schaltung

Einfach, günstig
Nachteil:
„anderer Regler“
Wartung

Digitaler Regler
→ HW: $\mu C + 2 \times DA + 1 \times AD$
→ SW: Soll-Ist-Vergleich
Regelalgorithmus
Hohe Initialkosten
„Regel“ flexibel
Fernwartung, Statusmeldung

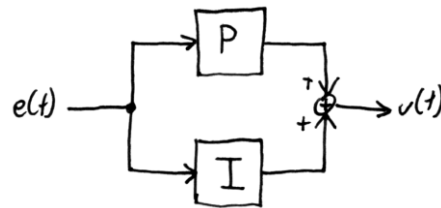
7.6.1. Grundtypen von Reglern

- P-Regler:**
 Erzeugt eine Stellgröße proportional zur Regelabweichung, reagiert schnell auf Regelabweichungen (schnelles „Anregeln“), kann die Regelabweichung zum Verschwinden bringen, aber diesen Zustand nicht halten (Regelabweichung 0 ergibt keine Stellgröße). Anwendung als Regler wenn eine geringe Regelabweichung nicht relevant bzw. sogar erwünscht ist.
- I-Regler:**
 Erzeugt eine Stellgröße, die dem zeitlichen Integral der Regelabweichung entspricht, kann die Regelabweichung zu 0 bringen und diesen Zustand auch halten, langsames reagieren auf Regelabweichungen als P-Regler, verschlechtert das Stabilitätsverhalten des Regelkreises (Phase -90°) und neigt zum Überschwingen.

- **„D-Regler“:**

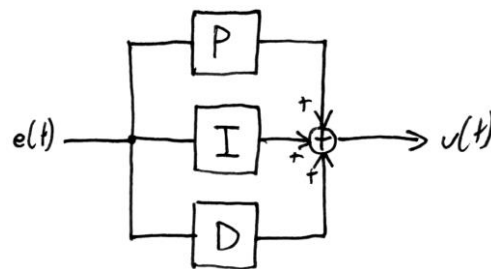
Erzeugt eine Stellgröße, welche der zeitlichen Änderung der Regelabweichung entspricht, bei Regelabweichung 0 bzw. bei konstanter Regelabweichung keine Stellgröße! Daher als alleiniger Regler ungeeignet und nur in Verbindung mit anderen Grundtypen einsetzbar. Vorteil: schnelles Reagieren auf Änderung der Regelabweichung, verbessertes Stabilitätsverhalten im Regelkreis (Phase $+90^\circ$)

- **PI-Regler:**



Parallelschaltung von P- und I-Regler, verbindet die Vorteile beider Regler (P-Regler: schnelles Anregeln, I-Regler: kann Regelabweichung 0 halten). Wird als Regler sehr häufig eingesetzt.

- **PID-Regler:**



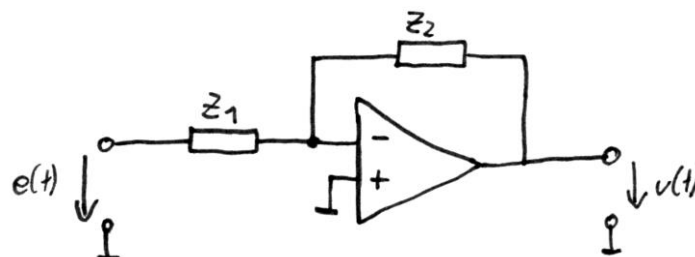
Der D-Anteil unterstützt zusätzlich das schnelle Anregeln, hat gegenüber einem PI-Regler ein verbessertes Stabilitätsverhalten und eine höhere Regelgeschwindigkeit.

PID = Standardregler

Einstellen und Variieren der Regelparameter nur mit Hilfe von Simulation, nicht probieren (!).

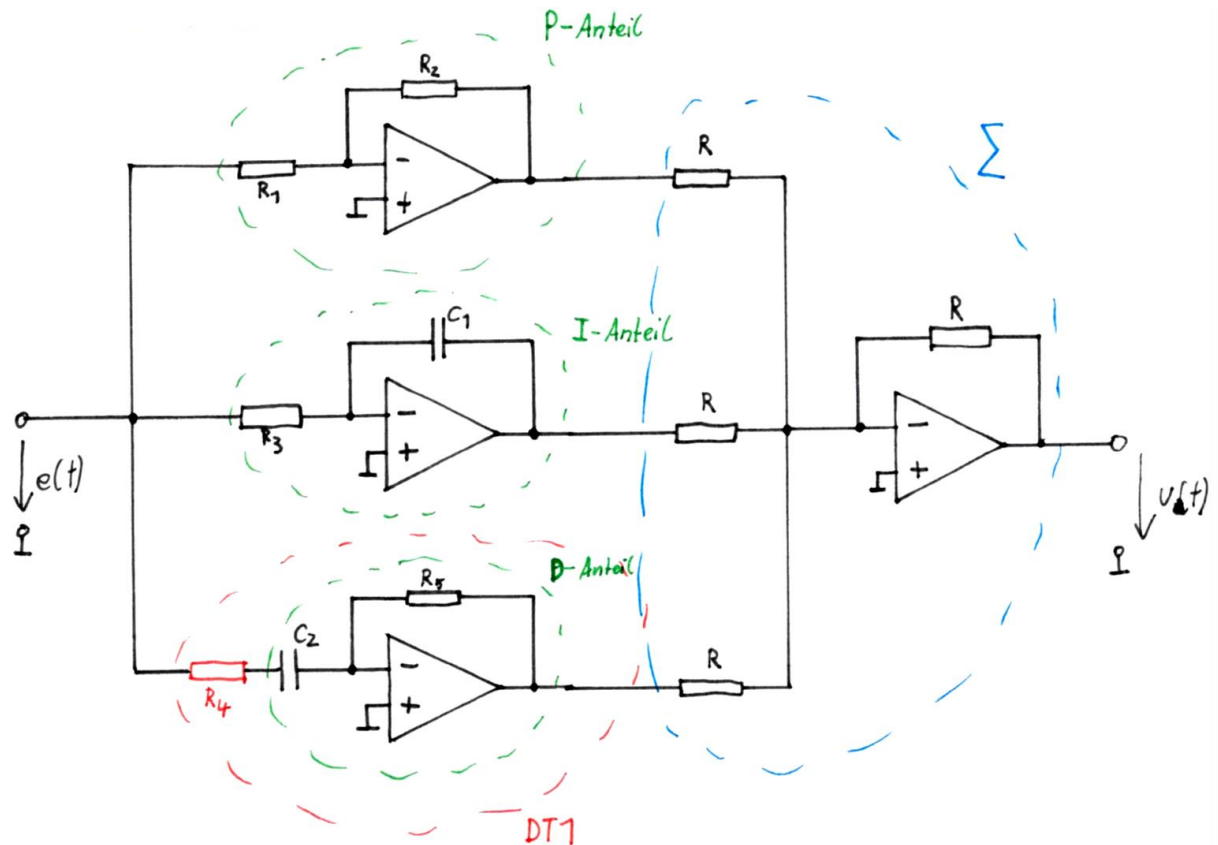
7.6.2. analoges Reglerdesign

Grunddesign analoger Regler -> gegengekoppelte OPV-Schaltung



$$G(j\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

- **PID_{T1}-Regler** (analog)



Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 G_{PIDT_1}(j\omega) &= G_P(j\omega) + G_I(j\omega) + G_{DT_1}(j\omega) \\
 &= \left[\left(-\frac{R_2}{R_1} \right) + \left(-\frac{1}{j\omega R_3 C_1} \right) + \left(-\frac{j\omega R_5 C_2}{1 + j\omega R_4 C_2} \right) \right] \cdot (-1) \\
 &= k_P + \frac{k_I}{s} + \frac{k_D}{1 + sT_1}
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

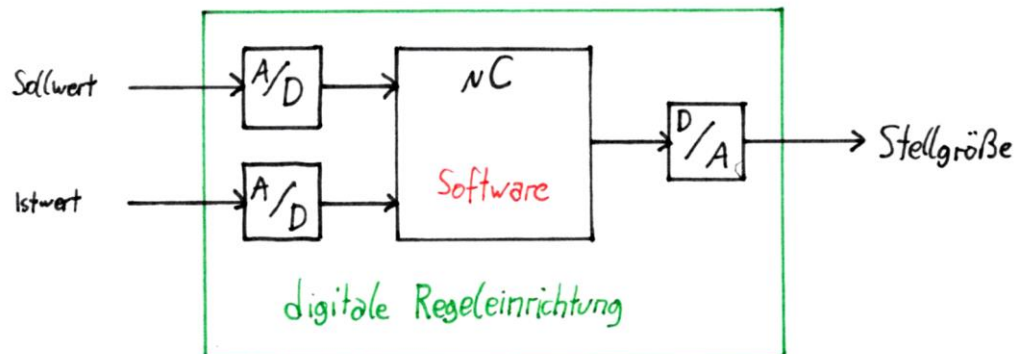
Faustregel für Wertebereich:

R: $\sim 10 \text{ k}\Omega \leq R \leq 1 \text{ M}\Omega$

C: $C \leq 10 \text{ }\mu\text{F}$ (bipolar!)

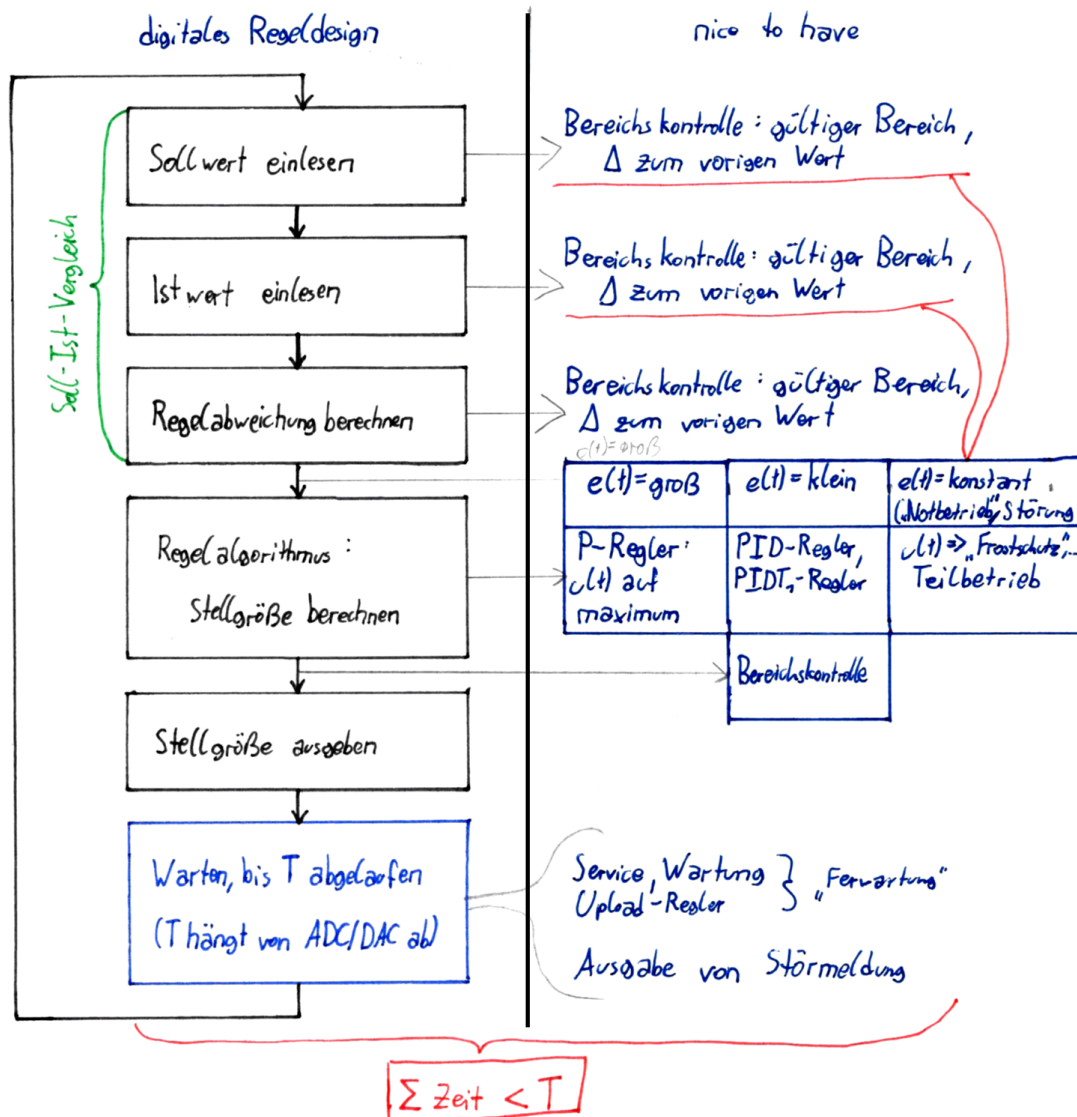
7.6.3. digitales Reglerdesign

Hardware:



Software:

- Soll-Ist Vergleich
- Regelalgorithmus



Regelalgorithmus:

PID: $u(t) = k_R * \left[e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_v * \frac{de(t)}{dt} \right]$

digitaler PID: Differentialgleichung -> Differenzengleichung ($t = nT$)

(zeit- & wertdiskret) $u(nT) = k_R * \left[e(nT) + \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n e(kT) * \Delta t + T_v * \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{\Delta t} \right]$

Differenzengleichung -> Wertefolge $\Delta t = T$

$$\begin{aligned}
 u_n &= k_R \cdot \left[e_n + \frac{1}{T_N} \cdot \sum_{k=0}^n e_k \cdot T + T_v \cdot \frac{e_n - e_{n-1}}{T} \right] \\
 u_n &= u_{n-1} + \Delta u \\
 u_{n-1} &= k_R \cdot \left[e_{n-1} + \frac{T}{T_N} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e_k + \frac{T_v}{T} \cdot (e_{n-1} - e_{n-2}) \right] \\
 \Delta u &= k_R \cdot \left[e_n - e_{n-1} + \frac{T}{T_N} \cdot e_n + \frac{T_v}{T} \cdot (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right] \\
 u_n &= u_{n-1} + \Delta u = u_{n-1} + k_R \cdot \left[e_n - e_{n-1} + \frac{T}{T_N} \cdot e_n + \frac{T_v}{T} \cdot (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right]
 \end{aligned}$$

Hardware Regelparameter "alte Werte" = Speicher

Bsp.: Springantwort digitaler PID Regler

$$k_R = 0,5 \quad T_N = 1 \text{ sec} \quad T_v = 4 \text{ sec} \quad T = 0,5 \text{ sec}$$

$$u_n = u_{n-1} + k_R \cdot \left[e_n - e_{n-1} + \frac{T}{T_N} \cdot e_n + \frac{T_v}{T} \cdot (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right]$$

$$u_n = u_{n-1} + 0,5 \cdot \left[e_n - e_{n-1} + \frac{0,5 \text{ sec}}{1 \text{ sec}} \cdot e_n + \frac{4 \text{ sec}}{0,5 \text{ sec}} \cdot (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right]$$

$$u_n = u_{n-1} + 0,5 \cdot (9,5 e_n - 17 e_{n-1} + 8 e_{n-2})$$

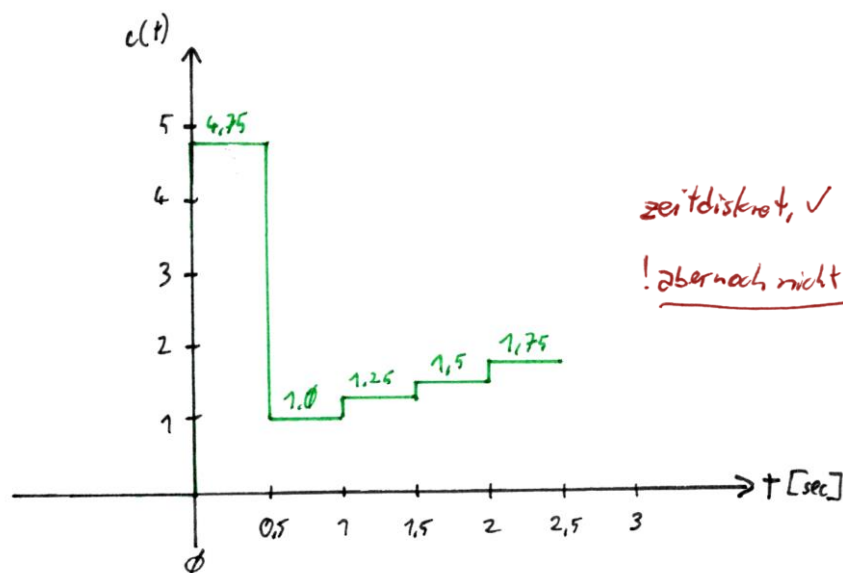
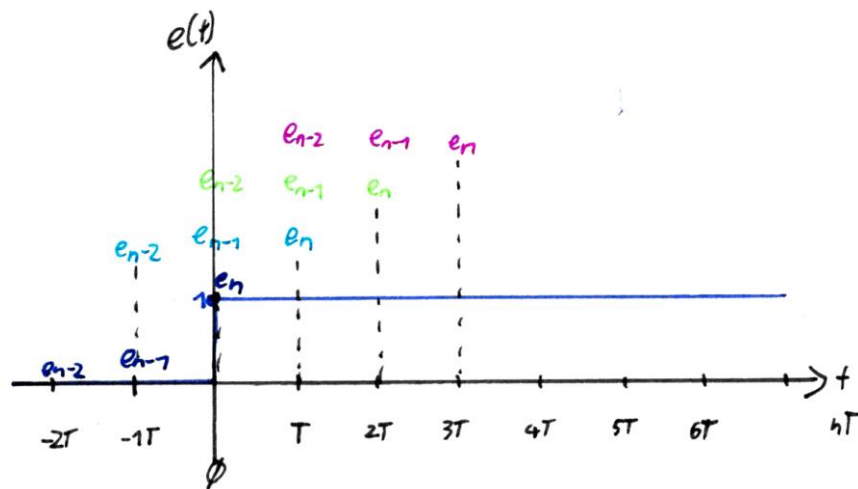
$$u_n = u_{n-1} + 4,75 e_n - 8,5 e_{n-1} + 4 e_{n-2}$$

einlesen von e_n
 ↓
 ausgeben von u_n
 ↓

n	n	u_{n-1} [V]	e_n [V]	e_{n-1} [V]	e_{n-2} [V]	u_n [V]
0	1	0	1	0	0	4,75
1	2	4,75	1	1	0	1,00
2	3	1,00	1	1	1	1,25
3	4	1,25	1	1	1	1,50
4	5	1,50	1	1	1	1,75

Sprunghöhe:

$$u_1 = k_R \cdot \left(1 + \frac{T}{T_N} + \frac{r_v}{T}\right)$$



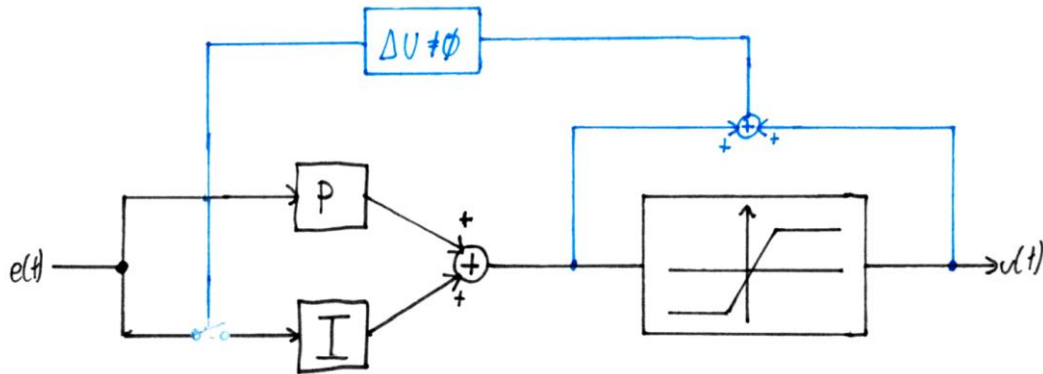
zeitdiskret, ✓

! aber auch nicht wertdiskret!

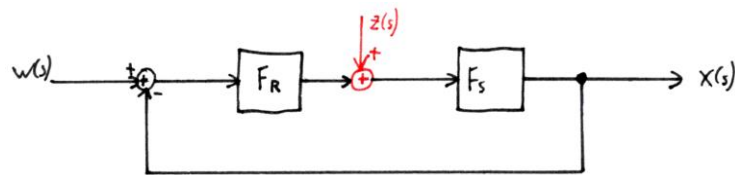
Anders als beim Analog-Regler (Beginn der Sprungantwort geht gegen unendlich – Stellgröße begrenzt durch Output-Swing des OPVs) ergibt sich beim digitalen Design ein definierter Wert (die sogenannte Sprunghöhe).

Wind-up:

Die Stellgröße des Reglers wird begrenzt durch den Zahlenbereich des Rechenergebnisses. Meist ist dieser größer als der Ausgabebereich des DA-Wandlers bzw. besitzen auch Stellglieder meist einen begrenzten Stellbereich. Daher wird in der Praxis die Stellgröße limitiert.



7.7. Der geschlossene Regelkreis



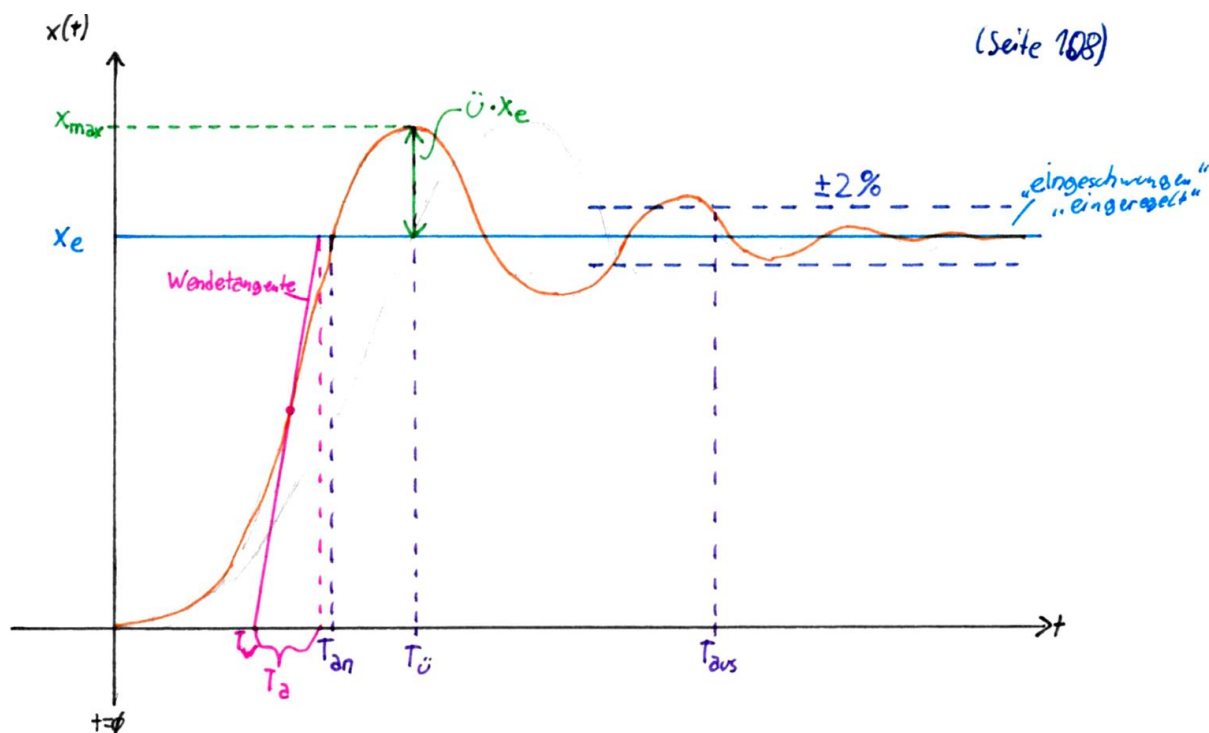
$$F_0 = F_R \cdot F_S$$

$$\begin{aligned} Z(s) \neq \emptyset \quad F_w &= \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S} = \frac{F_0}{1 + F_0} \\ W(s) \neq \emptyset \quad F_z &= \frac{F_S}{1 + F_R \cdot F_S} = \frac{F_S}{1 + F_0} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{kausal} \\ \rightarrow \text{LTI} \end{array} \right\}$$

→ „Überlagerungsprinzip“: $X(s) = F_w(s) \cdot W(s) + F_z(s) \cdot Z(s)$

7.7.1. Kennwerte des geschlossenen Regelkreises im Zeitbereich

(Haager S. 108)



T_{aus} Ausregelzeit: Ist jene Zeit, bei der der Endwert endgültig erreicht wird, praktisch: In das Toleranzfenster des Stationärwertes eintritt, ohne diesen wieder zu verlassen.

T_{an} Anregelzeit: Ist jene Zeit, bei der erstmals der stationäre Wert erreicht wird.

$T_{\ddot{U}}$.. Überschwingzeit: Zeit bis zum ersten Maximum ($X_{max} = \ddot{U} * X_e$), wobei $\ddot{U}$ der so genannte Überschwingfaktor ist.

T_U Verzugszeit: Ist der Schnittpunkt der Wendetangente mit der Zeitachse

T_a Anstiegszeit: Zeitdifferenz zwischen den Schnittpunkten der Wendetangente mit der Zeitachse und der Wendetangente mit dem Stationärwert.

7.7.2. Grundlegende Stabilitätsüberlegungen

Regelkreis: „charakteristische Übertragungsfunktion“:

$$F_0 = F_R * F_S$$

$$F_W = \frac{F_R * F_S}{1 + F_R * F_S} = \frac{F_0}{1 + F_0}$$

$$F_Z = \frac{F_S}{1 + F_R * F_S} = \frac{F_S}{1 + F_0}$$

kausal, LTI: → „Überlagerungsprinzip“

mathematisch: $F(s) = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}}$

$$= \frac{b_m * s^m + b_{m-1} * s^{m-1} + \dots + b_1 * s + b_0}{s^n + a_{n-1} * s^{n-1} + \dots + a_1 * s + a_0} \rightarrow \text{Nullstellen (reelle, konjugiert komplexe)}$$

Partialbruchzerlegung $\rightarrow \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \frac{c_3}{s-s_3} + \dots + \frac{c_n}{s-s_n}$

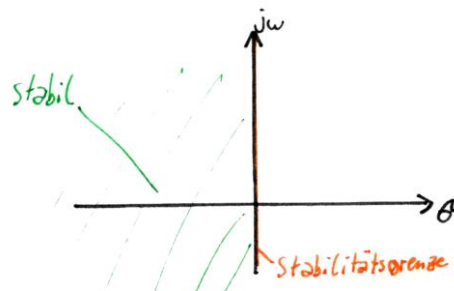
↓
„Zeitbereich“

$$c_1 * e^{s_1 t} + \dots$$

$$c_1 * e^{(\sigma_1 + j\omega_1)t} + \dots$$

$$c_1 * e^{\sigma_1 t} * e^{j\omega_1 t} + \dots$$

↪ sinus mit ω_1
↪ Amplitude $\begin{cases} \sigma > 0 & (\text{Amplitude steigt}) \Rightarrow \text{Oszillator} \\ \sigma = 0 & (\text{Amplitude konstant}) \Rightarrow \text{Stabilitätsgrenze} \\ \sigma < 0 & (\text{Amplitude klingt ab}) \Rightarrow \text{stabile Regelung} \end{cases}$



7.7.3. Nyquistkriterium

Das Nyquistkriterium liefert eine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises aus dem Frequenzgang der offenen Regelschleife (f_0 ...Schleifenverstärkung).

Charakteristische Übertragungsfunktionen:

$$F_W = \frac{F_R * F_S}{1 + F_R * F_S} = \frac{F_0}{1 + F_0}$$

$$F_Z = \frac{F_S}{1 + F_R * F_S} = \frac{F_S}{1 + F_0}$$

kausal, LTI: $\rightarrow$ „Überlagerungsprinzip“:

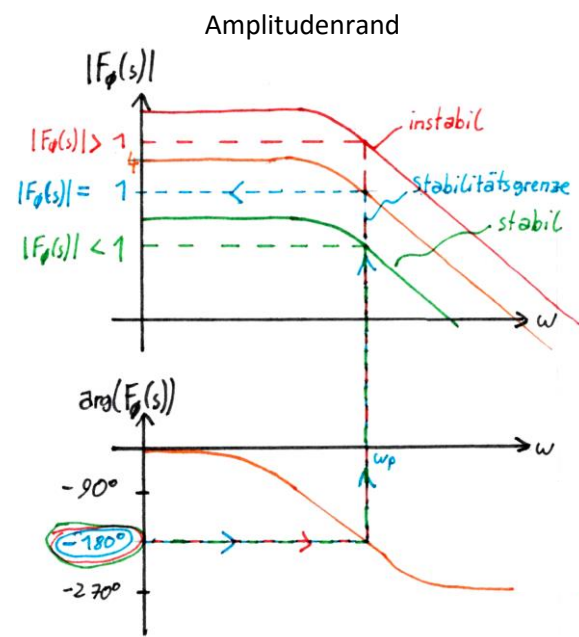
$$X(s) = W(s) * F_W(s) + Z(s) * F_Z(s)$$

Nennerpolynom $\rightarrow$ Nulstellen

$$1 + F_0 = 0$$

$$F_0 = -1 \begin{cases} |F_0(s)| = 1 \\ \arg(F_0(s)) = -180^\circ \end{cases} \text{ Stabilitätsgrenze}$$

7.7.4. Stabilitätsgüte



Amplitudenrand:

$$A_R = \frac{1}{|F_0(j\omega_p)|}$$

$$A_R \approx 4 \dots 10$$

←

Entwurf gutes Führungsverhalten

→

$$\alpha_R \approx 40^\circ \dots 60^\circ$$

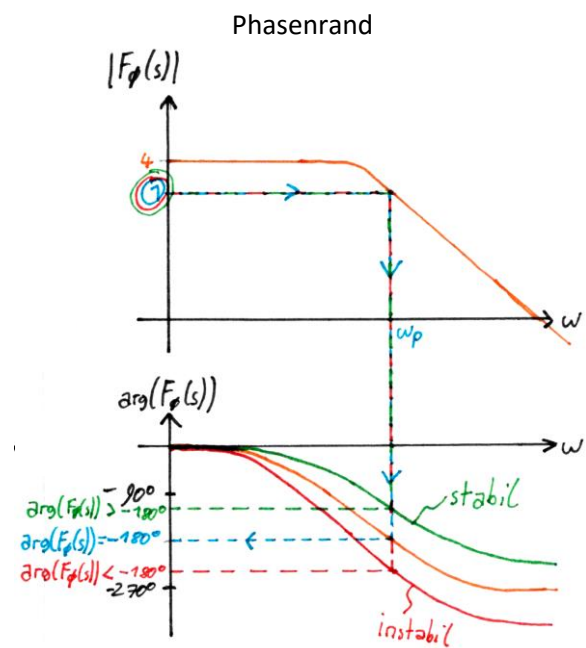
$$A_R \approx 2 \dots 3$$

←

Entwurf gutes Störungsverhalten

→

$$\alpha_R \approx 20^\circ \dots 50^\circ$$



Phasenrand:

$$\alpha_R = |-180^\circ| + \arg(F_0(j\omega_D))$$