

Digitaltechnik 5. Klasse

Bernhard Prinz

7. Oktober 2015, Hollabrunn

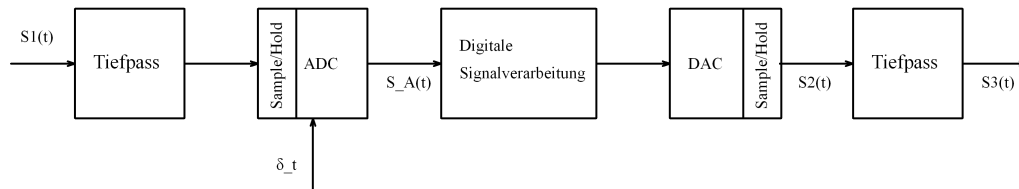
Inhaltsverzeichnis

1	Abtastsysteme	2
1.1	Blockschaltbild	2
1.2	Signalverlauf	2
2	Diskrete Fouriertransformation	5
2.1	Signalverlauf	5
2.2	Berechnung	6
2.3	Eigenschaften	7

1 Abtastsysteme

1.1 Blockschaftbild

Für die digitale Verarbeitung von Signalen werden sog. Abtastsysteme verwendet. Diese sind immer nach einem ähnlichen Schema aufgebaut:



Der erste (eingangsseitige) Tiefpass wird auch Anti-Aliasing-Tiefpass genannt, der Ausgangsseitige Tiefpass wird als Rekonstruktionstiefpass bezeichnet.

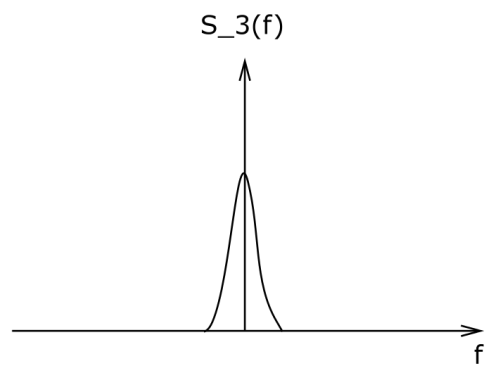
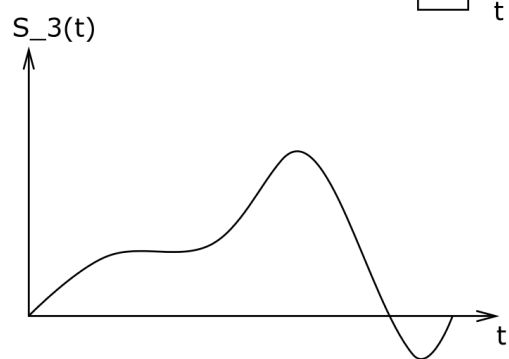
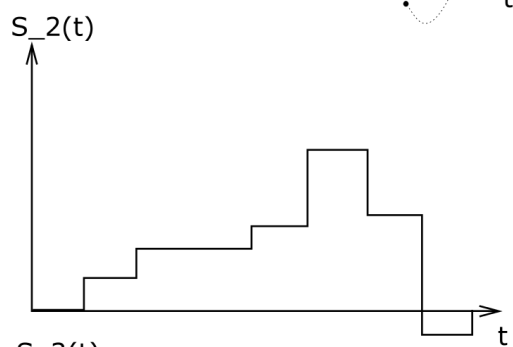
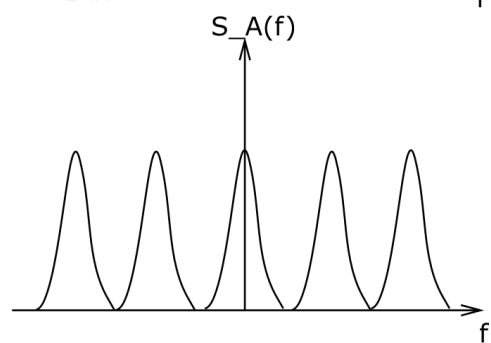
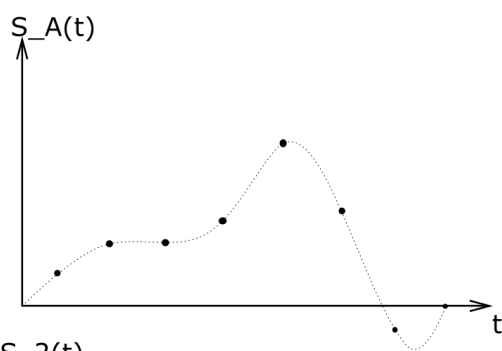
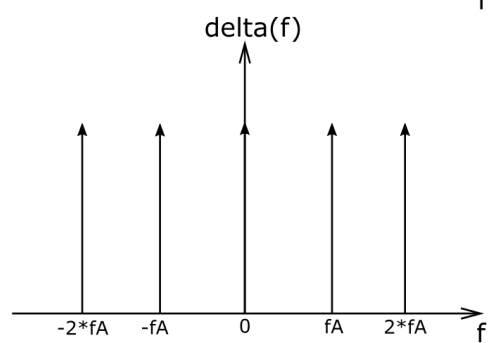
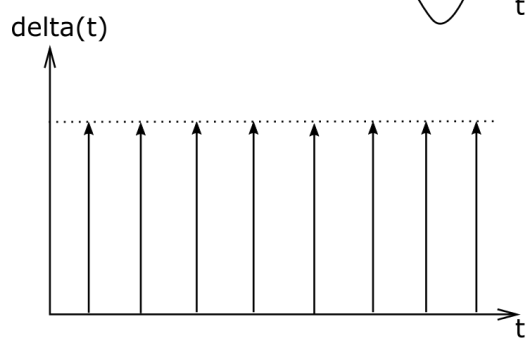
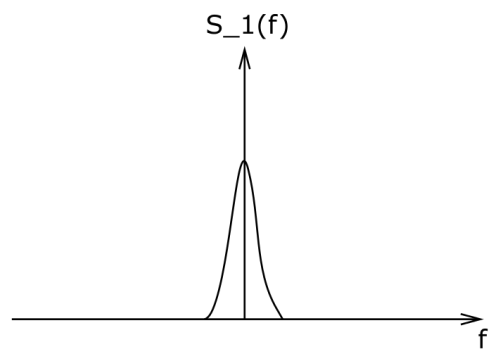
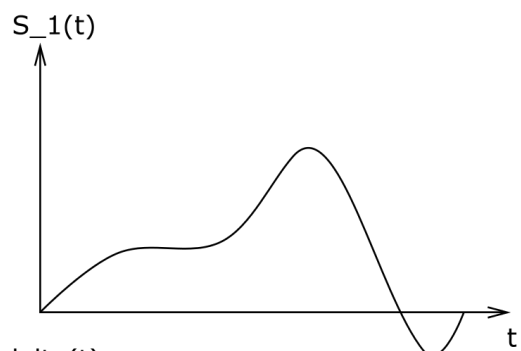
Liste der jeweiligen Signale:

- $S_1(t)$... Eingangssignal
- δ_T ... Abtastsignal
- $S_A(t)$... Abgetastetes Signal
- $S_2(t)$... generiertes Signal
- $S_3(t)$... Ausgangssignal

1.2 Signalverlauf

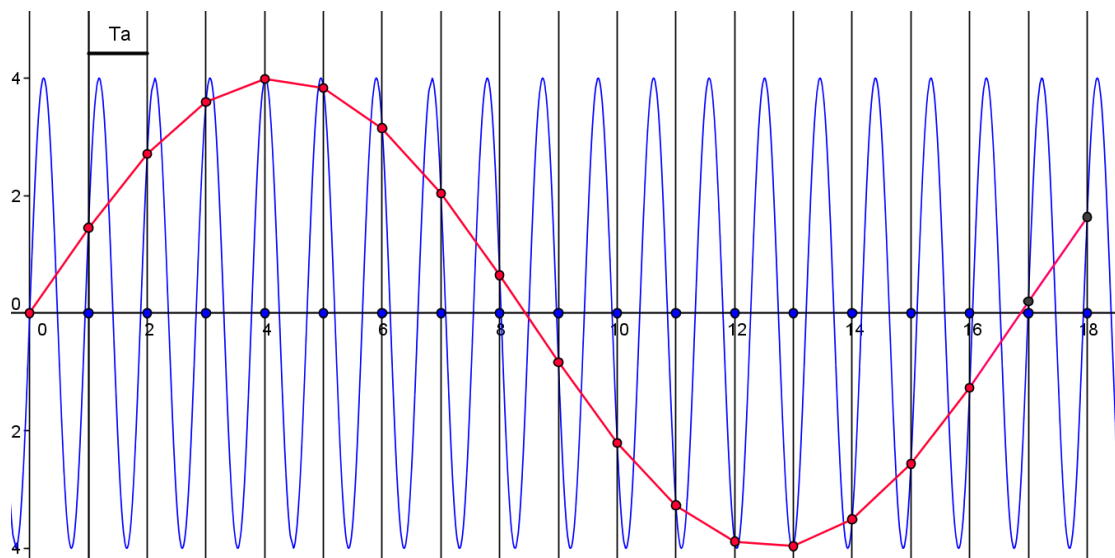
Die jeweiligen Signale und Beispiele für ihre Signalform sind auf der nächsten Seite zu finden.

Das Spektrum der abgetasteten Funktion $S_a(t)$ entspricht dem Spektrum der Originalfunktion $S_1(t)$, jedoch mit periodischer Wiederholung. Die Abtastfrequenz $f_a = \frac{1}{T_A}$ ist die Periode des periodischen Spektrums $S_A(f)$. Bandüberlappung (Aliasing) tritt nicht auf, wenn das Frequenzspektrum eine begrenzte Bandweite B besitzt und die Abtastfrequenz f_A hoch genug (min. $2 \times$ [Abtasttheorem: $f_A \geq 2B$]) gewählt wird.



Hier ein Beispiel für einen (sehr stark) unterabgetasteten Sinus (Danke an Prof. Butter für die GeoGebra-Datei):

Blau: Eingangssignal, Rot: Rückgewandeltes Signal

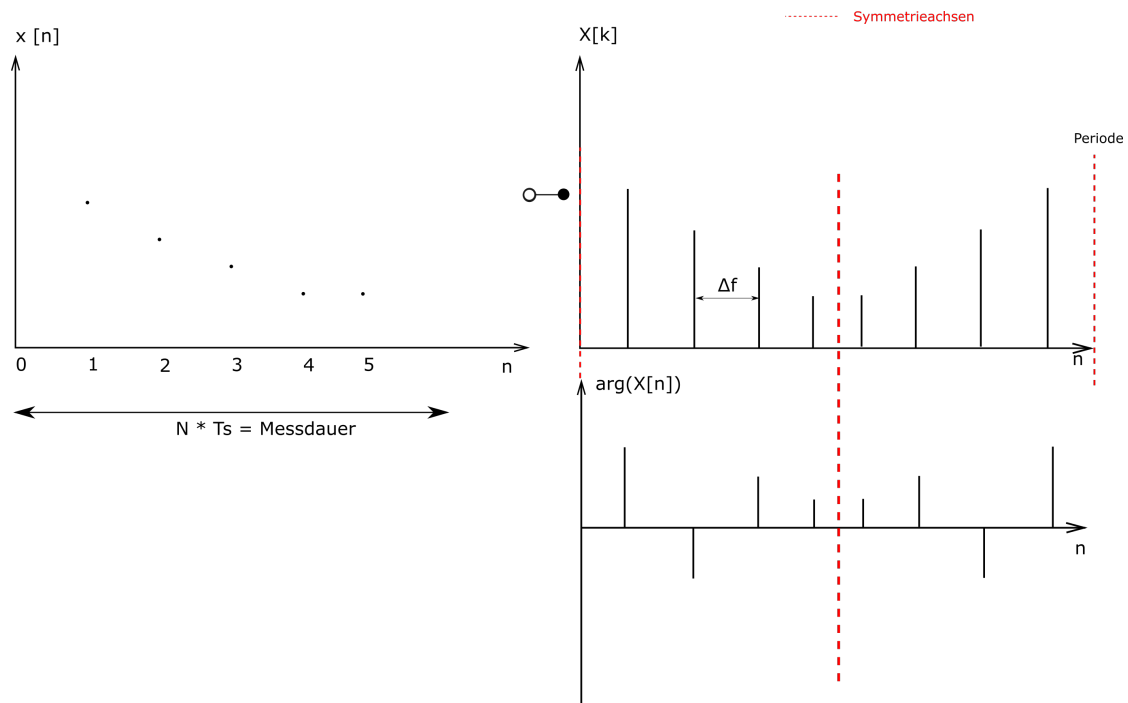


2 Diskrete Fouriertransformation

Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) ist eine Transformation aus dem Bereich der Fourier-Analyse. Sie bildet ein zeitdiskretes, endliches Signal, welches periodisch fortgesetzt wird, auf ein diskretes, periodisches Frequenzspektrum ab, das auch als Bildbereich bezeichnet wird. Die DFT besitzt in der digitalen Signalverarbeitung zur Signalanalyse große Bedeutung. Hier finden optimierte Varianten in Form der schnellen Fourier-Transformation (englisch fast Fourier transform, FFT) und ihrer Inversen Anwendung.

Dabei wird das diskrete (abgetastete) Signal $x[n]$ in den Frequenzbereich umgewandelt und bildet somit das Spektrum $X[n]$. Dies sieht wie folgt aus:

2.1 Signalverlauf



Dabei werden die Werte jeweils in den Speicher geschrieben:

$x[0]$	$X[0]$	$\varphi[0]$
$x[1]$	$X[0]$	$\varphi[1]$
$x[2]$	$X[0]$	$\varphi[2]$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$x[N-1]$	$X[N-1]$	$\varphi[N-1]$

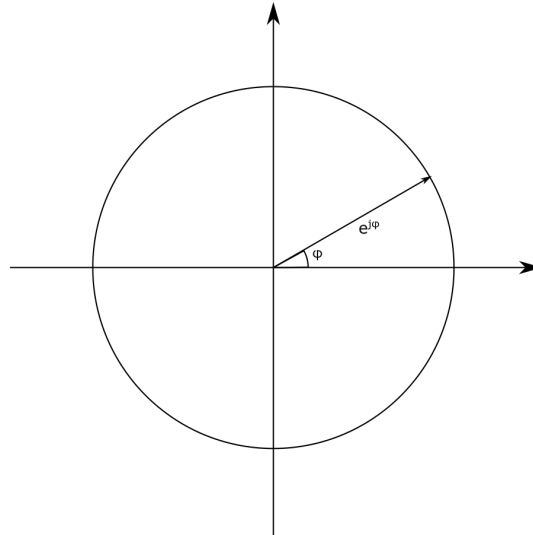
2.2 Berechnung

Für die Berechnung gilt folgende Formel:

$$DFT : X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] * e^{-jkn \frac{2*\pi}{N}}$$

wobei gilt:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j * \sin \varphi$$



Durch die Faktoren $k, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ist der Winkel φ quantisiert!

Die Berechnung der Werte für $X[k]$ wird über Matritzenmultiplikation erreicht (= Formel für DFT).

$$\begin{pmatrix} \underline{X}[0] \\ \underline{X}[1] \\ \underline{X}[2] \\ \vdots \\ \underline{X}[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & e^{-jkn \frac{2*\pi}{N}} & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

DFT - Matrix * Signalvektor = Koeffizientenvektor

$x[n] \circ - \bullet \underline{X}[k]$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N*T} = \frac{1}{\text{Messdauer}}$$

2.3 Eigenschaften

- Linearität: $x[n] = k_1 * x_1[n] + k_2 * x_2[n] \circ - \bullet X[k] = k_1 * X_1[n] + k_2 * X_2[n]$
- Periodizität:
 - Spektrum: Periode = Abtastfrequenz, N
 - Zeitbereich: Periode $N * T$ (Messdauer)
- Symmetrie: Symmetrisch bei $\frac{f_s}{2} * N$