

z-Transformation

$$\begin{array}{ccc}
 x[n] & \xrightarrow{\quad} & X(z) \\
 \text{Zeitbereich} & & \text{Bildbereich, } z\text{-Bereich}
 \end{array}$$

Die z-Transformation wird zur einfachen Berechnung von Übertragungsfunktionen von zeitdiskreten LTI-Systemen verwendet.

- Linearität:

$$\begin{array}{ccc}
 k_1 \cdot x_1[n] & \xrightarrow{\quad} & k_1 \cdot X_1[z] \\
 k_1 \cdot x_1[n] + k_2 \cdot x_2[n] & \xrightarrow{\quad} & k_1 \cdot X_1[z] + k_2 \cdot X_2[z]
 \end{array}$$

- Zeitverschiebung:

$$x[n-i] \xrightarrow{\quad} z^{-i} \cdot X(z)$$

Eine Zeitverzögerung um i Abtastzeitpunkte im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit z^{-i} im Bildbereich.

- Anwendung:
Differenzialgleichung:

$$y[n] = b \cdot x[n] + a \cdot y[n-1]$$

$$Y(z) = b \cdot X(z) + a \cdot z^{-1} \cdot Y(z)$$

$$Y(z) - a \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = b \cdot X(z)$$

$$Y(z) \cdot [1 - a \cdot z^{-1}] = b \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \dots \text{Übertragungsfkt.}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

Der Frequenzgang ergibt sich aus der Übertragungsfunktion $H(z)$, indem man $z = e^{j\Omega}$ einsetzt.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b}{1 - a \cdot e^{-j\Omega}}$$

wobei: $\Omega = 2\pi \cdot \frac{f}{f_s}$

f_s ... sampling frequency

f ... Frequenzvariable von $0 \dots \frac{f_s}{2}$

oder $\Omega = 0 \dots \pi$

Amplitudengang ist der Betrag von $H(e^{j\Omega})$

Phasengang ist die Phase von $H(e^{j\Omega})$

$\rightarrow |H(e^{j\Omega})|$ und $\arg(H(e^{j\Omega}))$

Bsp.: TP 1. Ordnung

$$a = 0,88425$$

$$b = 0,11575$$

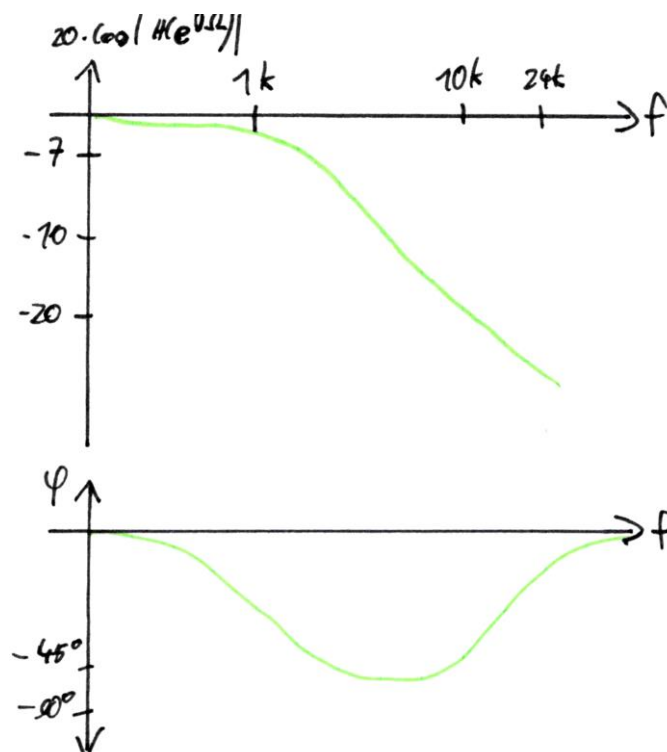
$$f_s = 48 \text{ kHz}$$

$1 \cdot e^{j\Omega}$ mit Taschenrechner:

$1/\Omega$ Komplex & rad

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{0,11575}{1 - 0,88425 \cdot e^{-j\Omega}}$$

f / Hz	0	500	1k	2k	5k	10k	24k
$20 \cdot \log H(e^{j\Omega}) $	0	-1	-3,3	-7,4	-14,5	-20	-24,2
$\arg H(e^{j\Omega})$	0	-26°	-43°	-57°	-60°	-48°	0

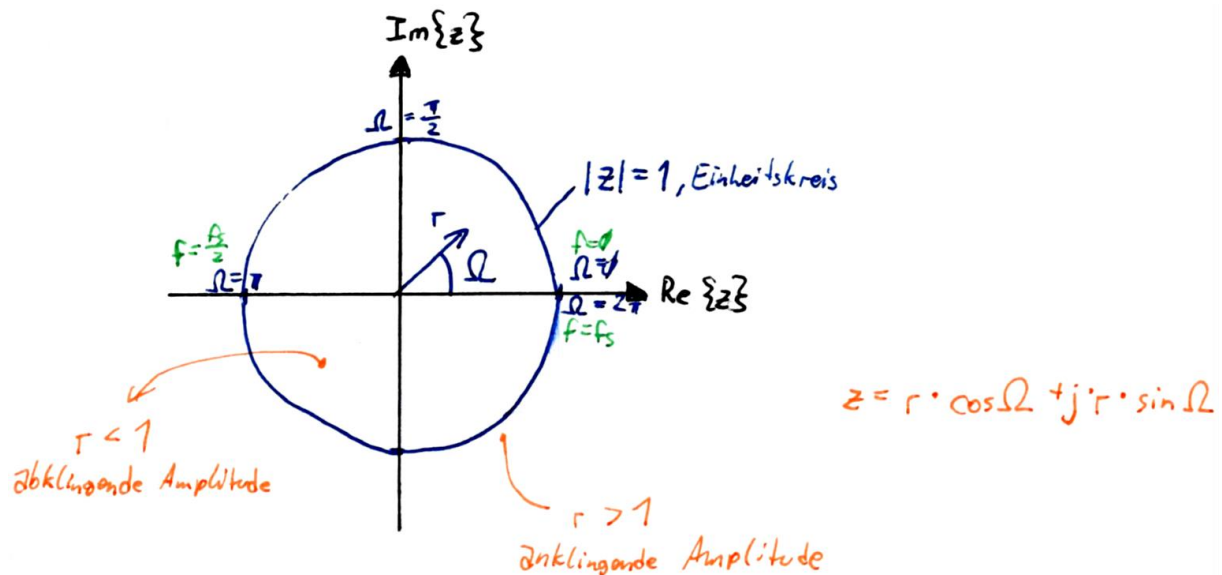


Pol und Nullstellen in der komplexen z-Ebene

z allgemein: $z = r \cdot e^{j\Omega}$

r ... Betrag

$\Omega = 2\pi \cdot \frac{f}{f_s}$... normierte Kreisfreq.



$$H(z) = \frac{b}{1 - a \cdot z^{-1}} \cdot \frac{z^1}{z^1} = \frac{b \cdot z}{z - a}$$

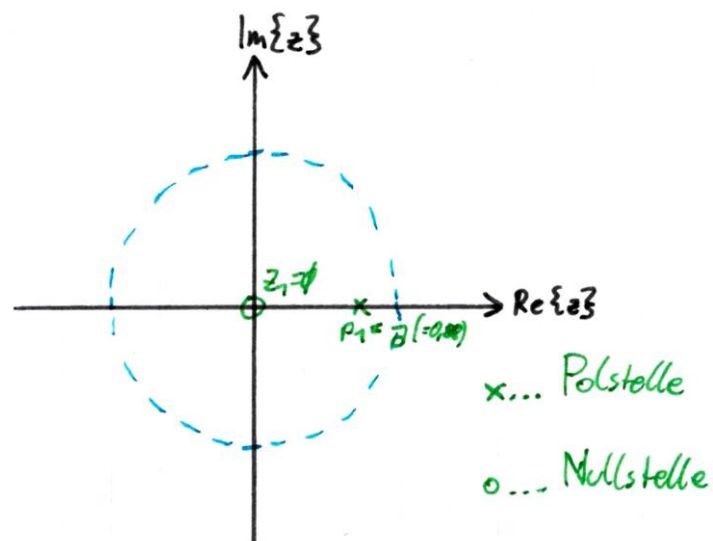
mit höchster Ordnung erweitern

Polstellen sind die Nullstellen des Nennerpolynoms:

$$z - a = 0 \quad p_1 = a$$

Nullstellen sind die Nullstellen des Zählerpolynoms:

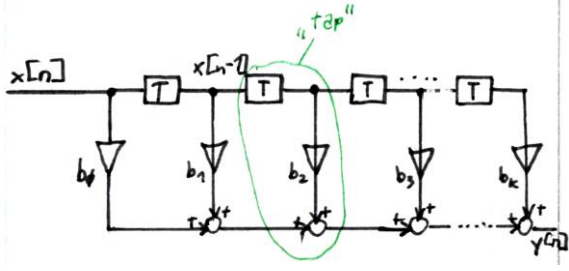
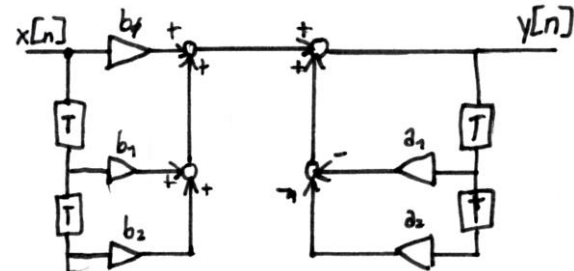
$$b \cdot z = 0 \quad z_1 = 0$$



Stabilität:

Ein zeitdiskretes LTI-System ist stabil, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

Filterarten:

FIR	IIR
finite impulse response endliche Impulsantwort nicht-rekursives Filter	infinite impulse response unendliche Impulsantwort rekursives Filter
	
$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + \dots$	$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] - a_1 \cdot y[n-1] - a_2 \cdot y[n-2]$
$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3} + \dots$	$Y(z) = b_0 \cdot X(z) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot X(z) + b_2 \cdot z^{-2} \cdot X(z) - a_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) - a_2 \cdot z^{-2} \cdot Y(z)$ $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$
immer stabil, ergibt höhere Ordnung (höherer Rechenaufwand)	kann stabil sein, ergibt niedrigere Ordnung (niedrigerer Rechenaufwand)