

HÖHERE TECHNISCHE BUNDESLEHRANSTALT HOLLABRUNN

Höhere Abteilung für Elektronik und Technische Informatik

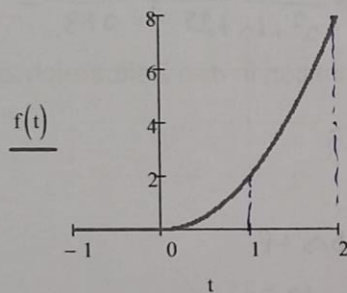
um: 23.3.2015	Art der Leistungsfeststellung: 3. Schularbeit Gruppe A		Wertung	Bewertung
se: 4BHEL	Gegenstand: Angewandte Mathematik	1)	16	16
		2)	20	18
	Note: 90 - 100 Sehr gut 76 - 89 Gut 63 - 75 Befriedigend 51 - 62 Genügend 0 - 50 Nicht Genügend	3)	24	20
50 min (Vorbereitungszeit)		4)	20	14
		5)	20	20
er: I. Prochazka	Name: <i>Gammann</i>	Σ	100	88

Zusätzliche Blätter sind nummeriert und mit Namen versehen in den Angabebogen einzulegen!

Blätter: 1

- 1.) Gegeben sind die folgenden Funktionsverläufe.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung!
Geben Sie deren Laplace-Transformierte an!

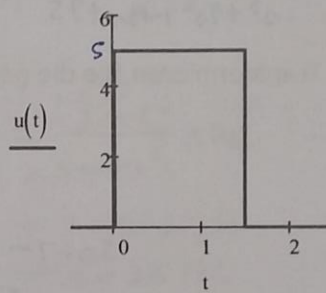
a)



$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 2t^2 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{2 \cdot 2}{s^3} = \frac{4}{s^3}$$

b)



$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 5 & \text{if } 0 \leq t < 1.5 \\ 0 & \text{if } 1.5 \leq t \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s} \cdot e^{-1.5s}$$

- 2.) **Beweisen** Sie den Formalismus der **Laplace-Transformation** für $f(t)$.
Die Korrespondenztabelle ist nur zur Kontrolle erlaubt.

$$f(t) = \sin(a \cdot t)$$

siehe Beiblatt

Goursnam

7) $f(t) = \sin(\alpha t)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{\sin(\alpha t) e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} + \frac{\alpha}{s} \int_0^{\infty} \cos(\alpha t) e^{-st} dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \sin(\alpha t) \quad v' = e^{-st} \\ u' = \alpha \cos(\alpha t) \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} u = \cos(\alpha t) \quad v' = e^{-st} \\ u' = -\alpha \sin(\alpha t) \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} u' = \alpha \cos(\alpha t) \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \\ u' = -\alpha \sin(\alpha t) \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right]$$

$$= \left[-\frac{\sin(\alpha t) e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{\alpha \cos(\alpha t) e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} - \frac{\alpha^2}{s^2} \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) \cdot e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) = \left[-\frac{\sin(\alpha t) e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{\alpha \cos(\alpha t) e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

Grenzen:

um
zu ∞

$$= 0 + 0 - 0 + \frac{\alpha}{s^2} = \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt = \frac{\frac{\alpha}{s^2}}{1 + \frac{\alpha^2}{s^2}} = \frac{\frac{\alpha}{s^2}}{\frac{s^2 + \alpha^2}{s^2}} = \frac{\alpha s^2}{(s^2 + \alpha^2) s^2} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

A 3a.) Bestimmen Sie die **Laplace-Transformierte** und stellen Sie das Ergebnis möglichst einheitlich dar (gemeinsamer Nenner, zusammenfassen)

$$f(t) := e^{-3t} \cdot (4 \sin(2t) - 5 \cos(2t))^2 \quad + 16 \cos^2(2t) + 9 \cos^2(2t)$$

$$A(t) = e^{-3t} \cdot (16 \sin^2(2t) - 40 \sin(2t) \cos(2t) + 25 \cos^2(2t)) =$$

$$= e^{-3t} (16 + 9 \cos^2(2t) - 20 \sin(4t)) =$$

$$= -20 \sin(4t) e^{-3t} + 16 e^{-3t} + 9 \cos^2(2t) e^{-3t} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \cos^2$ nicht lösbar (Andere Möglichkeit auf Beiblatt, $\sin^2$ auch nicht lösbar)

$$F(s) = \frac{-80}{(s+3)^2 + 16} + 16 \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{-80}{s^2 + 6s + 9 + 16} + \frac{16}{s+3} =$$

$$= \frac{16s^2 + 16s + 160}{s^3 + 9s^2 + 43s + 75} = \frac{-80}{s^2 + 6s + 25} + \frac{16}{s+3} = \frac{-80s - 240 + 16s^2 + 96s + 400}{s^3 + 6s^2 + 25s + 3s^2 + 18s + 75}$$

b.) Transformieren Sie die gegebene Bildfunktion in den Zeitbereich zurück!

$$Y(s) := \frac{5s+1}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$5s+1 = As+3A+Bs+B$$

$$5 = A+B$$

$$1 = 3A+B$$

$$A = -2$$

$$B = 7 \quad \checkmark$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{7}{s+3}$$

$$y(t) = -2 \cdot e^{-t} + 7 e^{-3t} \quad \checkmark$$

A 4.) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$5 \cdot y''(t) + 10 \cdot y'(t) + 5 \cdot y(t) = 25 \cdot \cos(2 \cdot t) \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = 0$$

$$y''(t) + 2 \cdot y'(t) + y(t) = 5 \cos(2t)$$

$$\underbrace{s^2 Y(s)}_{\checkmark} - \underbrace{s y(0)}_{\checkmark} - \underbrace{y'(0)}_{\checkmark} + \underbrace{2s Y(s)}_{\checkmark} - \underbrace{2 y(0)}_{\checkmark} + \underbrace{Y(s)}_{\checkmark} = \frac{5s}{s^2 + 4} \quad \checkmark$$

$$Y(s) (s^2 + 2s + 1) - s - 2 = \frac{5s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) (s^2 + 2s + 1) = \frac{5s}{s^2 + 4} + s + 2 \quad \checkmark$$

$$Y(s) = \frac{5s + s^3 + 4s + 2s^2 + 8}{(s^2 + 4)(s^2 + 2s + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 9s + 8}{(s^2 + 4)(s + 1)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{(s + 1)^2} \quad (\checkmark)$$

Ansatz nur f. komplexe W!

$$\underbrace{s^3}_{\checkmark} + \underbrace{2s^2}_{\checkmark} + \underbrace{9s}_{\checkmark} + \underbrace{8}_{\checkmark} = \underbrace{As^3}_{\checkmark} + \underbrace{2As^2}_{\checkmark} + \underbrace{As}_{\checkmark} + \underbrace{Bs^2}_{\checkmark} + \underbrace{2Bs}_{\checkmark} + \underbrace{B}_{\checkmark} + \underbrace{Cs^3}_{\checkmark} + \underbrace{4Cs}_{\checkmark} + \underbrace{Ds^2}_{\checkmark} + \underbrace{4D}_{\checkmark}$$

$$1 = A + C \rightarrow A = 1 - C$$

$$2 = 2A + B + D \rightarrow 0 = B - 2C + D$$

$$9 = A + 2B + 4C \rightarrow 8 = 2B + 3C$$

$$8 = B + 4D$$

$$B = \frac{8}{5} \quad C = \frac{8}{5} \quad D = \frac{8}{5} \quad A = -\frac{3}{5} \quad \checkmark \checkmark \checkmark$$

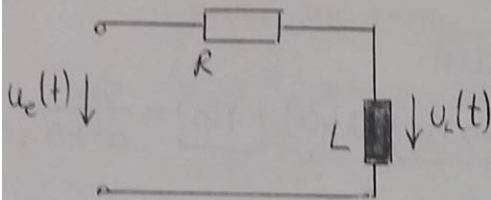
DT! Verschiebung nur bei cos/sin! vgl. Kennen!

$$Y(s) = -\frac{3}{5} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{8}{5} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{8}{5} \frac{s + 1}{(s + 1)^2} + \frac{8}{5} \frac{1}{(s + 1)^2}$$

$$Y(s) = -\frac{3}{5} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{5} \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{8}{5} \frac{1}{(s + 1)} - \frac{8}{5} \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{8}{5} \frac{1}{(s + 1)^2}$$

$$y(t) = -\frac{3}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \sin(2t) + \frac{8}{5} e^{-t}$$

A 5.) Berechnen Sie für die gegebene Schaltung den Verlauf der Ausgangsspannung und den Stromverlauf, wenn $u_e(t)$ zur Zeit $t = 0$ s wirksam wird und $i(t=0) = 0$ ist:



$$u_e(t) = 25 \cdot \sin(5t) \rightarrow U_e(s) = \frac{125}{s^2 + 25}$$

$$R = 10 \, \Omega$$

$$L = 1 \, \text{H}$$

Ausgangssps.: $u_L(t) = ?$
 $i(t) = ?$

~~$$i(t) = \frac{u_e(t)}{R}$$~~

$$I(s) = \frac{U_e(s)}{R + sL} = \frac{\frac{125}{s^2 + 25}}{R + sL} = \frac{125}{(s^2 + 25)(R + sL)}$$

$$U_L(s) = \frac{125sL}{(s^2 + 25)(R + sL)} = \frac{125s}{(s^2 + 25)(10 + s)} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{C}{s + 10}$$

$$125s = As^2 + 10As + Bs + 10B + Cs^2 + 25C$$

$$0 = A + C \quad A = 10$$

$$125 = 10A + B \quad B = 25$$

$$0 = 10B + 25C \quad C = -10$$

$$U_L(s) = 10 \frac{s}{s^2 + 25} + 5 \frac{5}{s^2 + 25} - 10 \frac{1}{s + 10}$$

$$u_L(t) = 10 \cos(5t) + 5 \sin(5t) - 10 e^{-10t} \quad \checkmark$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_L(t)$$

$$i(t) = \int u_L(t) dt$$

$$i(t) = 2 \sin(5t) - \cos(5t) + e^{-10t} \quad \checkmark$$