

HÖHERE TECHNISCHE BUNDESLEHRANSTALT HOLLABRUNN
Höhere Abteilung für Elektronik-Technische Informatik

Datum: 12. Jänner 2015	Art der Leistungsfeststellung: 2. Schularbeit	Beispiel	Mögl. Punkte	Erreichte Punkte
Klasse: 4 BHEL/ A	Angewandte Mathematik	1.)	20	20
Zeit: .100 min	Benotung: 90 – 100: Sehr gut 76 – 89: Gut 63 – 75: Befriedigend 51 – 62: Genügend 0 – 50: Nicht genügend	2.) 3.) 4.) 5.)	20 20 20 20	20 20 20 20
Note: 1				
Lehrer: M. Prochazka	Name d. Schülers: Graussam	Σ	100 P.	100

- 1.) Berechnen Sie die Gleichung jener Integralkurve, die durch den Punkt $P(1/0)$ geht.
Verwenden Sie die Methode der **Variation der Konstanten** :

Perfekt!

$$x(x+1)y' = x(x+1) + y$$

$$\rightarrow x(x+1)y' - y = x(x+1)$$

$$x(x+1)y' - y = x(x+1)$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$\ln y = \ln x - \ln(x+1) + \ln c$$

$$\ln y = \ln \frac{cx}{x+1}$$

$$y = \frac{cx}{x+1}$$

$$y_p = \frac{c(x)x}{x+1}$$

$$y'_p = \frac{(c'(x)x + c(x))(x+1) - c(x)x}{(x+1)^2} = \frac{c'(x)x^2 + c(x)x + c'(x)x + c(x) - c(x)x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{c'(x)x^2 + c'(x)x + c(x)}{(x+1)^2}$$

einsetzen: $\frac{c'(x)x^3 + c'(x)x^2}{(x+1)} = x(x+1)$

$$c'(x)x^2 + c'(x)x = (x+1)^2$$

$$c'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x} = 1 + \frac{x+1}{x(x+1)}$$

$$c'(x) = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow c(x) = x + \ln x$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$Ax + A + Bx = 1$$

$$A + B = 0 \rightarrow B = -A$$

$$A = 1$$

$$[c'(x)x + c(x)]$$

$$\frac{(x^2+2x+1) \cdot (x^2+x) - x^2 \pm x}{x^2+x} = 1 + \frac{x+1}{x(x+1)}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)}$$

$$Ax + A + Bx = x + 1$$

$$A + B = 1 \rightarrow B = 0$$

$$A = 1 \rightarrow A = 1$$

$$y_p = \frac{x^2 + x \ln x}{x+1}$$

$$y_{all} = x \cdot \frac{c+x + \ln x}{x+1}$$

$$P(1/0)$$

$$0 = \frac{c+1}{2}$$

$$0 = c+1$$

$$c = -1$$

$$y_{all} = x \cdot \frac{x + \ln x - 1}{x+1}$$

2.) Lösen Sie die Differentialgleichung: mit der Methode der Variation der Konstanten!

$$x \cdot y' = y + x^4 \cdot \sin(x)$$

$$x y' = y + x^4 \sin x$$

$$\rightarrow x y' - y = x^4 \sin x$$

$$x y' = y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = \ln x + \ln c$$

$$y_{\text{hom}} = c \cdot x$$

$$y_p = c(x) \cdot x$$

$$y_p' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$\text{einsetzen: } c'(x) x^2 = x^4 \sin x$$

$$c'(x) = x^2 \sin x$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x^2 \sin x$$

$$c(x) = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int \sin x dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{bmatrix}$$

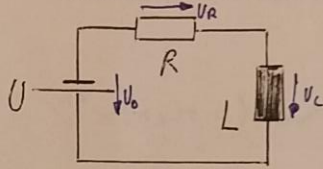
$$\begin{bmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{bmatrix}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$y_p = x(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)$$

$$y_{\text{all}} = x(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c)$$

- 3.) In einem Stromkreis mit ohmschen Widerstand R und dem induktiven Widerstand L soll ein Gleichstrom eingeschalten werden.



Die Stromstärke i steigt von $i = 0$ bis zum stationären Wert $I = U/R$.

- a) Leiten Sie die Differentialgleichung her!
 b) Lösen Sie diese allgemein für die Anfangsbedingung $i = 0$ für $t = 0$ s!
 c) Skizzieren Sie den Verlauf der Stromstärke!

$$U_0 = U_R + U_L$$

$$U_0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\text{or) } \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{U_0}{L}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t)$$

$$\frac{1}{i(t)} di(t) = -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln(i(t)) = -\frac{R}{L} t + k$$

$$i(t) = k \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$i(t)_p = k(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$i(t)_p = k'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} \cdot k(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

einsetzen: $k'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U_0}{L}$

Anfangsbed.:

$$0 = \frac{U_0}{R} + k \cdot e^{0 \cdot k}$$

$$k = -\frac{U_0}{R}$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad \text{②}$$



$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L} t}$$

$$k(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} t}$$

$$i(t)_p = \frac{U_0}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} t} \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

- 4.) Bestimmen Sie die Lösungskurve der folgenden Differentialgleichung
2. Ordnung, die im Punkt P (0/2) die Steigung 4 hat!

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$y_{hom} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{2x}$$

$$y_p = x^2 \cdot A \cdot e^{2x}$$

$$y_p' = 2Ax e^{2x} + 2Ax^2 e^{2x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{2x} + 4Ax e^{2x} + 4Ax e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{2x} + 8Ax e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x}$$

$$2Ae^{2x} + 8Ax e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} - 8Ax e^{2x} - 8Ax^2 e^{2x} + 4x^2 A e^{2x} = e^{2x}$$

$$4 = 2 \cdot (2 + 0) + 1 \cdot (C_2)$$

$$4 = 4 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$y = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + 2 \right)$$

$$2A = 1 \rightarrow A = 0,5$$

$$8A - 8A = 0$$

$$4A - 8A + 4A = 0$$

$$y_p = \frac{x^2 e^{2x}}{2}$$

$$y_{all} = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 + C_2 x \right) \xrightarrow{P(0|2)} \underline{C_1 = 2}$$

$$y_{all} = 2e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + 2 + C_2 x \right) + e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 + C_2 x \right)$$

- 5.) Bestimmen Sie die Lösungskurve der folgenden Differentialgleichung
2. Ordnung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und $y'(0) = -2,5$:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_p'' = 6Ax + 2B$$

$$y''(x) - 2y'(x) = 9x^2 + 6x$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$y_{hom} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2$$

$$y_p = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{5}{8}e^{2x} + \frac{3}{8}$$

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = 9x^2 + 6x$$

$$6A - 4B = 6 \rightarrow -9 - 4B = 6 \rightarrow B = -\frac{15}{4}$$

$$2B - 2C = 0 \rightarrow -\frac{15}{2} - 2C = 0 \rightarrow C = -\frac{15}{4}$$

$$-6A = 9 \rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

$$y_p = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{4}x$$

$$y_{all} = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + C_1 e^{2x} + C_2 \rightarrow 1 = C_1 + C_2$$

$$y_{all}' = -\frac{9}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{15}{4} + 2C_1 e^{2x} \rightarrow -2,5 = -\frac{15}{4} + 2C_1$$

$$\frac{5}{4} = 2C_1$$

$$C_1 = \frac{5}{8}$$

$$C_2 = 1 - C_1$$

$$C_2 = \frac{3}{8}$$