

Bändermodell der Halbleiter

Das Bändermodell wird hier qualitativ beschrieben, um das Verständnis für die nachfolgenden Untersuchungen zu erleichtern. Für die quantitative Beschreibung sind gewisse Kenntnisse der Quantenmechanik erforderlich. Es wird dazu auf weiterführende Literatur verwiesen.

Valenzband und Leitungsband

Das Energiespektrum des Wasserstoffatoms besagt, dass sein Elektron nur ganz bestimmte diskrete Energiewerte annehmen kann. Dies ist eine Folge der Welleneigenschaften der Elektronen und wird in der Quantenmechanik beschrieben. Das unterste Energieniveau (Hauptquantenzahl $n=1$) entspricht der Elektronenbahn mit kleinstmöglichem Radius (innerste Schale). Um das Elektron auf den nächsthöheren Energiezustand (zweite Schale) zu bringen, muss Arbeit gegen die anziehenden Kräfte der gegennamigen Ladungen (Kern und Elektron) geleistet werden; dieser Energieunterschied beträgt für Wasserstoff $10,15 \text{ eV}^1$. Bei größerer Energiezufuhr kann das Elektron auf höhere Energieniveaus gehoben und schließlich vom Atomkern getrennt werden. Diese Ionisationsenergie beträgt für Wasserstoff $13,53 \text{ eV}$. Das vom Kern gelöste Elektron kann dann jede beliebige kinetische Energie annehmen.

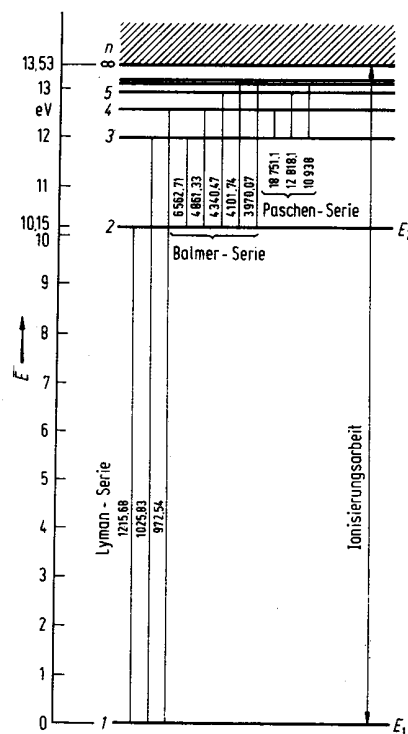


Abbildung 1 - Energieniveauschema des H-Atoms

¹ $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$

Die Energiezufuhr zur Hebung des Elektrons von einem Niveau E_1 zu einem höheren Niveau E_2 kann durch Strahlung erfolgen. Da die Strahlungsenergie quantisiert ist, muss die Frequenz der Strahlung der Energiedifferenz $E_2 - E_1$ entsprechen:

$$hf = E_2 - E_1$$

Dies gilt auch, wenn das Elektron vom Energieniveau E_2 in das Niveau E_1 fällt und dabei Strahlung emittiert. Die den einzelnen Übergängen entsprechenden Wellenlängen der Strahlung sind in der Abbildung 1 in 0,1nm eingetragen. Der Bereich der sichtbaren Strahlung liegt zwischen 300nm und 780nm und entspricht einer Energiedifferenz zwischen ca. 3,5 und 1,6 eV. Die an Gasen (geringer Druck) feststellbaren Linienspektren beweisen die Existenz der scharfen Energieniveaus der Einzelatome.

Es ist bekannt, dass die Spektren von Gasen eine Linienverbreiterung erleiden, wenn der Druck bei der Gasentladung erhöht wird. Dies hat seine Ursache in einer Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen, die als Folge des mit zunehmenden Drucks kleiner werdenden mittleren Abstands größer wird.

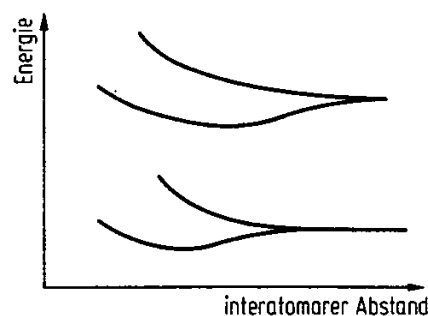


Abbildung 2 - Aufspaltung von Energiezuständen als Funktion des Abstands zwischen 2 Atomen

Die Abbildung 2 zeigt die Energieniveaus für zwei Atome, deren Abstand variiert wird. Bei großem Abstand ist keine Wechselwirkung vorhanden; mit kleiner werdenden Abstand entsteht eine Aufspaltung der zunächst zusammenfallenden Energieniveaus der beiden gleichen Atome und zwar zuerst für den größeren Bahnradien entsprechend höheren Energiezuständen. Diese Aufspaltung von Energiezuständen durch Wechselwirkung ist ganz allgemein bei Verkopplung von Systemen festzustellen und steht im direkten Zusammenhang mit der Aufspaltung von Resonanzfrequenzen in gekoppelten Resonatoren.

Bestehen gekoppelte Systeme aus N -Atomen, so entsteht eine Aufspaltung in N Energieniveaus. Da die Anzahl der Atome in einem technisch interessanten Volumen sehr groß ist, ist es zweckmäßig, sich an Stelle der Einzelniveaus ein kontinuierliches Energieband vorzustellen, in welchem sich die Elektronen befinden können. Auf die

² $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{Ws}$ ist das Plancksche Wirkungsquantum)

Tatsache, dass ein solches Energieband aus einer zwar großen, jedoch endlichen Anzahl unterschiedlicher Niveaus besteht wird noch näher eingegangen.

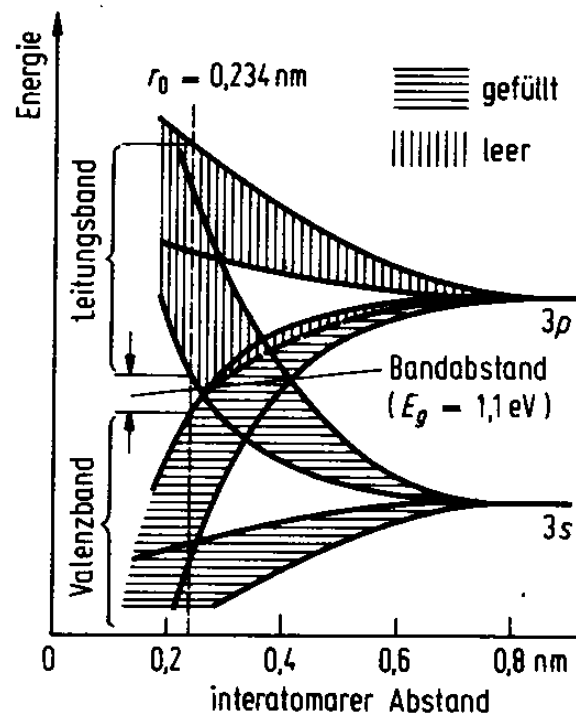


Abbildung 3 - Energiebänder in Si als Funktion des interatomaren Abstands

Die Abbildung 3 zeigt das Energiespektrum für Silizium Atome in Abhängigkeit vom interatomaren Abstand. Man erkennt, dass Bänder existieren, welche durch Elektronen besetzt werden können (erlaubte Bänder) und welche durch eine sogenannte Verbotene Zone voneinander getrennt sind. Die Weite dieser verbotenen Zone, der Bandabstand, ist kennzeichnend für jedes Halbleitermaterial.

Das untere der beiden erlaubten Bänder ist für genügend tiefe Temperaturen ($T \rightarrow 0$) vollständig mit Elektronen besetzt, es sind dies die Valenzelektronen, und man nennt dieses Band Valenzband. Ein vollständig mit Elektronen besetztes Band kann keinen Beitrag zu einem elektrischen Strom liefern, da die Elektronen keine zusätzliche (kinetische) Energie aufnehmen können. Das obere erlaubte Band ist für ($T \rightarrow 0$) vollständig unbesetzt. Bei endlicher Temperatur können jedoch einige Elektronen die Energiedifferenz überwinden und in das obere Band (Leitungsband) gelangen, wo sie „frei“ beweglich sind. Aus Valenzelektronen sind Leitungselektronen geworden. Durch das Anheben eines Elektrons aus dem Valenzband in das Leitungsband entsteht im Valenzband eine Lücke. Die Elektronen des nicht vollständig besetzten Valenzbandes können einen Beitrag zum elektrischen Stromfluss liefern, der äquivalent durch positiv geladene Ladungsträger (Löcher) am oberen Rand des Valenzbandes beschrieben werden kann.

Vergleicht man diese Ausführung mit denen zum Bindungsmodell, so sieht man, dass die zur Lösung der Bindung erforderliche Energie gleich dem Bandabstand ist. Die Energie

der Elektronen ist in der Abbildung 4 nach oben aufgetragen. Die Elektronen haben die Tendenz nach „unten“ zu fallen und zunächst das Valenzband zu füllen. Bei endlicher Temperatur haben einige Elektronen genügend hohe Energie, um in das Leitungsband zu gelangen, wo sie sich in der Nähe des unteren Bandrandes aufhalten werden. Die Energie der Löcher (fehlende Elektronen) hingegen wird demgemäß nach unten aufgetragen. Man stellt sich die Löcher wie „Luftblasen“ in einer Flüssigkeit vor, welche die Tendenz haben, nach oben zu steigen. Die Löcher liegen daher in der Nähe der oberen Bandkante des Valenzbandes.

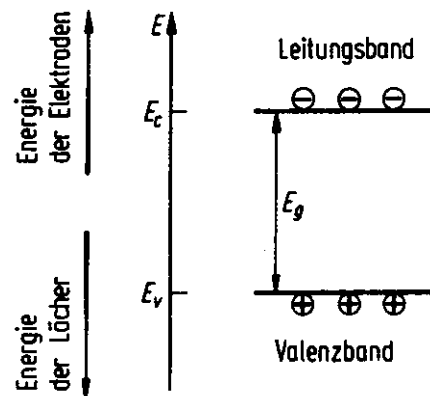


Abbildung 4 - Bänderschema eines eigenleitenden Halbleiters

Für reines Halbleitermaterial, also bei Eigenleitung, entstehen für jedes Elektron, welches aus dem Valenzband in das Leitungsband gelangt ein Loch im Valenzband. Es gilt für Eigenleitung $p = n$.

Außer den hier besprochenen beiden Bändern existieren im Halbleiter noch weitere, die jedoch ohne Bedeutung für die elektrischen Eigenschaften sind. Es interessiert nur das oberste, bei $T \rightarrow 0$ vollständig unbesetzte Band, das Leitungsband.

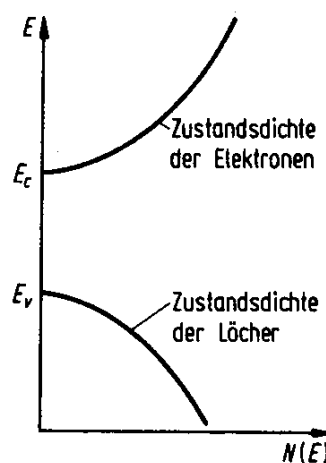


Abbildung 5 - Zustandsdichte der Elektronen im Leitungsband und der Löcher im Valenzband

Wenn von einem vollständig besetzten Band die Rede ist, so setzt das die bisher noch nicht besprochene Tatsache voraus, dass die Anzahl der „verfügbaren Plätze“ begrenzt ist

und dass sich auf jedem „Platz“ nicht mehr als ein Elektron befinden kann. Man nennt einen verfügbaren Platz im Band Zustand und benützt als maßgebende Größe die Zustandsdichte $N(E)$. Diese gibt die Anzahl der Zustände je Energieeinheit und Volumen an. $N(E) dE$ ist also die Anzahl der Zustände im Volumen 1 zwischen E und $E + dE$. Abbildung 6 zeigt die Zustandsdichte für Elektronen und Löcher.

Die zweite Tatsache ist eine Folge des Pauli-Prinzips, welches besagt, dass jeder quantenmechanischer Zustand nur durch maximal zwei Elektronen unterschiedlichen Elektronenspins zu besetzen ist. Die Besetzungswahrscheinlichkeit $W(E)$ für die Zustände unter Berücksichtigung des Pauli Prinzips wird im Abschnitt der Fermi-Verteilungsfunktion behandelt.

Donator- und Akzeptor-Terme

Im Störstellenhalbleiter ist die zur Ionisation eines Dotierungsatoms erforderliche Energie von der Größenordnung 0,01 eV. Das Energieniveau des nicht gebrauchten Valenzelektrons eines Donators liegt daher knapp unter der Leitungsbandkante, wie in Abbildung 6 gezeigt. Die Zufuhr dieser kleinen Energie $E_C - E_D$ genügt, um ein Leitungselektron (und ein räumlich festes positives Ion) aus dem neutralen Donator zu erhalten. Analog liegt das Energieniveau für das aufzunehmende Elektron eines Akzeptors knapp über der Valenzbandkante.

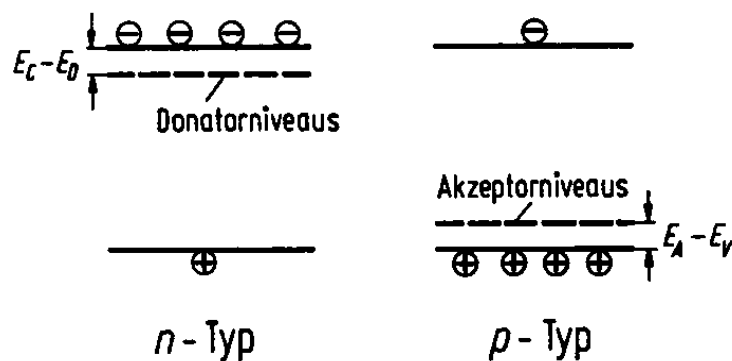


Abbildung 6 - Bänderschema im Störstellenhalbleiter

Die Abbildung 6 zeigt die Donator- bzw. Akzeptorniveaus von Dotierungsatomen in Ge, Si und GaAs. Generell ergeben Elemente der V Gruppe Donatoren in der Nähe der Leitungsbandkante und Elemente der III Gruppe Akzeptoren mit Niveaus in der Nähe der Valenzbandkante. Bemerkenswert ist das Verhalten von Gold, welches Niveaus in der Mitte des verbotenen Bandes ergibt. Bei der Beschreibung der Rekombinationsmechanismen wird darauf noch eingegangen.

Ge	Li	Sb	P	As	S	Cu	Ag	Au	Se						
	0,0095	0,0096	0,012	0,013	0,18	0,26	0,09	0,04	0,14						
						A	A	A	0,28						
						0,29	0,20								
Si	Li	Sb	P	As	Bi		Ni	S	Mn	Ag	Pt	Hg			
	0,033	0,039	0,044	0,049	0,069			0,18							
							0,35	0,37		0,33	0,37	0,33			
							A								
GaAs	Te					Si	Ge		Sn	O	Se				
	0,003					0,002	flacher Donator		flacher Donator		0,005				
	B	Al	Tl	Ga	In	Be	Zn	Cd	Mn	Fe	Co	Ni	Hg	Pt	Cr
	0,01	0,01	0,01	0,011	0,011	0,07	0,13	0,15	0,16	0,16	0,37	0,31	0,30	0,20	0,12
						0,04		0,05	0,09	0,05	0,35	0,25	0,22	0,083	0,07
						0,02		0,03						0,04	
	B	Al	Ga	In	Tl	Co	Zn	Cu	Au	Fe	O				
	0,045	0,057	0,065	0,16	0,26		0,24	0,22			0,03				
	Mg	C	Cd	Li	Zn	Mn	Co	Ni	Si	Ge	Fe	Cr	Li	Cu	
	0,012	0,019	0,021	0,023	0,024	0,096	0,16	0,21	0,026	0,08	0,143	0,15	0,023	0,023	

Abbildung 7 - Gemessene Ionisationsenergie einiger Dotierungsatome in Ge, Si und GaAs.

Fermi-Verteilungsfunktion

Die bereits erwähnte Wahrscheinlichkeit $W(E)$ für die Besetzung eines Zustandes durch ein Elektron ist in Abbildung xx als Funktion der Energie gezeichnet. Für $T \rightarrow 0$ ist $W(E)$ eine Sprungfunktion. Für Zustände unterhalb einer bestimmten Energie, dem Fermi-Niveau E_F , ist $W(E) = 1$, d.h. der Zustand ist sicher besetzt. Für Energien oberhalb des Fermi-Niveaus ist $W(E) = 0$ d.h. die Zustände sind unbesetzt. Diese Auffüllung aller Zustände bis zu einem bestimmten Niveau ist eine Folge des bereits erwähnten Pauli-Prinzips in Verbindung mit der Tendenz des Gesamtsystems, den energetisch tiefsten Zustand einzunehmen. Als Analogon stelle man sich einen Wasserbehälter vor, in welchem die Wahrscheinlichkeit, Wasser bis zu einer bestimmten Höhe (bzw. potentiellen Energie) anzutreffen, den Wert 1 hat und darüber den Wert Null. Auch hier gilt das Prinzip: „Wo ein Teilchen ist, kann kein Zweites sein.“

Bei endlicher Temperatur wird die Besetzungswahrscheinlichkeit nicht abrupt vom Wert 1 (sicher ein Elektron) zum Wert Null (sicher kein Elektron) springen, sondern stetig übergehen.

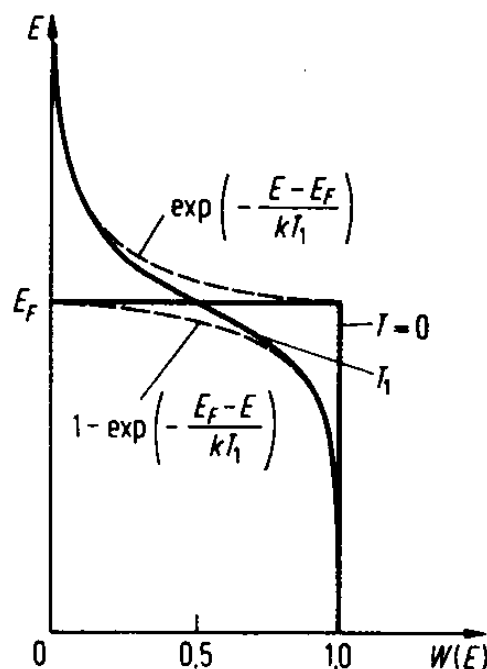


Abbildung 8 - Fermiverteilung. Wahrscheinlichkeit der Besetzung von Zuständen im Festkörper durch Elektronen als Funktion der Energie

Die Fermi-Verteilung $W(E)$ genügt der Beziehung:

$$W(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}}$$

Für $E - E_F$ hat die Wahrscheinlichkeit den Wert $1/2$. Sie gilt generell für nicht unterscheidbare Teilchen, welche dem Pauli-Prinzip unterliegen (Fermionen), also speziell für Elektronen im Festkörper.

Für $|E - E_F| \gg kT$ kann man $W(E)$ durch eine einfache Funktion annähern. Für $E - E_F \gg kT$ kann die 1 im Nenner gegen die Exponentialfunktion vernachlässigt werden und man erhält die Boltzmannverteilung:

$$W(E) \approx e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)}$$

Für $-(E-E_F) \gg kT$ ist die Exponentialfunktion im Nenner klein gegen 1, und man erhält durch Reihenentwicklung die Boltzmannverteilung für Löcher:

$$1-W(E) \approx e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)}$$

Für Zimmertemperatur ist kT ungefähr 26meV. Ist $|E - E_F| > 100\text{meV}$ so ist der Fehler bei der Verwendung der Boltzmann-Näherung kleiner als 2%. Interessiert daher die Besetzungswahrscheinlichkeit nur in genügender Entfernung vom Fermi-Niveau, so können die Boltzmann-Näherungen benutzt werden. (Abbildung 8).

Die Größe $W(E)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen eines Elektrons bei der Energie E an. Demgemäß ist $1-W(E)$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichtantreffen von Elektronen, also für das Antreffen von Löchern. Man erkennt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron über dem Fermi-Niveau anzutreffen, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, ein Loch im gleichen Abstand unter dem Fermi-Niveau anzutreffen.

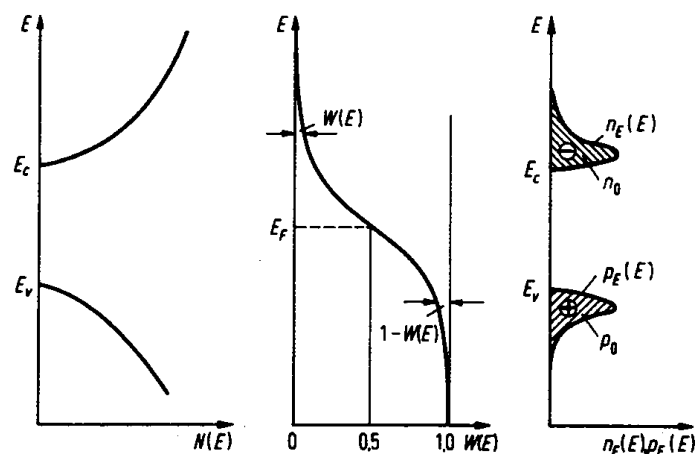


Abbildung 9 – Ladungsträgerdichten für den eigenleitenden Halbleiter

Im reinen Halbleiter ist für $T \rightarrow 0$ das Valenzband durch Elektronen voll besetzt und das Leitungsband leer; das Fermi-Niveau muss sich in der verbotenen Zone befinden. Die Abbildung 9 zeigt die Zustandsdichte $N(E)$ und die Besetzungswahrscheinlichkeit $W(E)$ für

³ K Boltzmannkonstante = $1,380 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

einen eigenleitenden Halbleiter. Wegen $n_0 = p_0$ und ungefähr gleicher Zustandsdichten für Elektronen und Löcher liegt das Fermi-Niveau im eigenleitenden Halbleiter etwa in der Mitte des verbotenen Bandes.

Die Teilchendichte je Energieintervall erhält man durch Multiplikation der Zustandsdichte mit der Besetzungswahrscheinlichkeit des jeweiligen Trägertyps. Diese Teilchendichte⁴ ist in der Abbildung nn rechtsgezeichnet. Man sieht, dass Leitungselektronen vorwiegend in der Nähe der Leitungsbandkante liegen und die Löcher vorwiegend in der Nähe der Valenzbandkante. Die Trägerdichten im thermischen Gleichgewicht sind gleich den Flächen unter $n_E(E)$ und $p_E(E)$ ⁵:

$$n_0 = \int_{E_C}^{\infty} n_E(E) dE$$

$$p_0 = \int_0^{E_V} p_E(E) dE$$

Im dotierten Halbleiter überwiegt eine Trägerdichte; das Fermi-Niveau liegt im n-Type Halbleiter näher am Leitungsband, im p-Type Halbleiter näher am Valenzband. Für quantitative Aussagen ist es unerlässlich, die Lage des Fermi-Niveaus zu kennen. Generell stellt sich im homogenen Halbleiter bei thermischem Gleichgewicht das Fermi-Niveau so ein, dass der Halbleiter neutral ist.

Die Abbildung 9 zeigt einen Vergleich der Bändermodelle von Leiter, Halbleiter und Isolator. Im Metall liegt das Fermi-Niveau in einem erlaubten Band. Die Anzahl der für den Stromtransport zur Verfügung stehenden Elektronen ist sehr groß. Im nicht entarteten⁶ – nicht zu stark dotierten – Halbleiter liegt das Fermi-Niveau im verbotenen Band; bei endlicher Temperatur steht eine bestimmte Anzahl von Elektronen (n) und Löchern (p) zum Stromtransport zur Verfügung. Durch Dotierung können diese Trägerdichten beeinflusst werden. Im Isolator liegt das Fermi-Niveau ebenfalls im verbotenen Band, welches jedoch so breit ist (ca. 7eV für Diamant), dass keine freien Ladungsträger zur Verfügung stehen. (Der an sich nicht sehr drastische Unterschied im Bandabstand wirkt sich wegen der exponentiellen Abhängigkeit der Trägerdichten vom Bandabstand sehr stark aus.) Diese Gegenüberstellung zeigt den prinzipiellen Unterschied zwischen Halbleiter und Isolator.

⁴ Einheit der Teilchendichte $\text{eV}^{-1}\text{m}^{-3}$

⁵ Die Integration ist eigentlich nur über das Leitungsband bzw. das Valenzband zu erstrecken. Da jedoch $n_E(E)$ für hohe Energiewerte und $p_E(E)$ für kleine Energiewerte sehr klein werden, können die hier angegebenen Integrationsgrenzen verwendet werden.

⁶ Von einem entarteten Halbleiter spricht man dann, wenn die Dotierung so stark ist, dass auch bei $T \rightarrow 0$ Elektronen im Leitungsband bzw. Löcher im Valenzband zur Stromleitung zur Verfügung sehen.

Ebenso wie das Energieniveauschema des Einzelatoms die optischen Eigenschaften (d.h. die Linienspektren der Gase erklärt, so erklärt das Bändermodell die optischen Eigenschaften der Festkörper. Die Absorption von Strahlung tritt auf, wenn im energetischen Abstand $E = hf$ über einen besetzten Zustand ein unbesetzter Zustand existiert. Demgemäß absorbieren Metalle Strahlung niederer Frequenz bis hoher Frequenz; Halbleiter und Isolatoren lassen Strahlungen bis zu einer Frequenz $f = E_g/h$ hindurchtreten und absorbieren kurzwelligere Strahlung. Diese Absorptionskante liegt für Halbleiter im infraroten Spektralbereich und für Isolatoren im ultravioletten; Isolatoren sind – als Einkristall – durchsichtig. Halbleiter nicht. Durch Messung der Absorptionskante kann der Bandabstand ermittelt werden. Da bei Absorption und Emission außer dem Energiesatz auch der Impulssatz erfüllt sein muss, ist die Bedingung $f > E_g/h$ wohl notwendig, aber nicht hinreichend.

Zustandsdichte

Der Begriff der Zustandsdichte ist von Bedeutung, da wegen des Pauli Prinzips jeder Zustand nur durch maximal 2 Elektronen besetzt werden kann. Ein Weg zur Ermittlung der Zustandsdichte ist die Ermittlung der Zustandsdichte über die Unschärferelation als Konsequenz der Welleneigenschaft der Elementarteilchen. In einem eindimensionalen Kristall der Länge L ist das Elektron sicher innerhalb L , und man erhält daher für den Impuls die Unschärfe

$$\Delta p_x \cdot L \geq h$$

Ein Zustand im Impulsraum wird nun sinnvollerweise so definiert, dass er gegenüber einen anderen Zustand unterscheidbar ist. Die Dichte der Zustände im (eindimensionalen) Impulsraum ist daher

$$N^* \Delta p_x \approx \frac{1}{\Delta p_x} = \frac{L}{h}$$

Die Anzahl der Zustände im Bereich dp_x ist:

$$N^* dp_x = \frac{L}{h} dp_x$$

Der Vorteil der Ermittlung der Zustandsdichte aus der Unschärferelation liegt darin, dass die Erweiterung auf den 3-dimensionalen Raum leicht möglich ist.

Das betrachtete Teilchen befindet sich im Volumen $V = L_x L_y L_z$. Auf Grund der Unschärferelation können seine Impulsvektoren nicht genauer als folgt bestimmt werden:

$$\Delta p_x \geq \frac{h}{L_x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{h}{L_y}, \quad \Delta p_z \geq \frac{h}{L_z}$$

Man kann daher Impulsvektor nur sagen, dass er innerhalb eines Volumens $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3/V$ endet. Eine feinere Unterscheidung ist sinnlos. Bezeichnet man mit $N^*(p)$ die Zustandsdichte im Impulsraum, so liegen $N^*(p)dp$ Zustände zwischen p und $p+dp$. Alle Impulsvektoren für Impulse zwischen p und $p+dp$ enden in einer Kugelschale des Volumens $4\pi p^2 dp$. Die Anzahl der Zustände zwischen p und $p+dp$ ist im Impulsraum (Phasenraum) daher gleich dem Quotienten aus Volumen der Kugelschale und Volumen eines Zustandes.

$$N^* dp = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} V$$

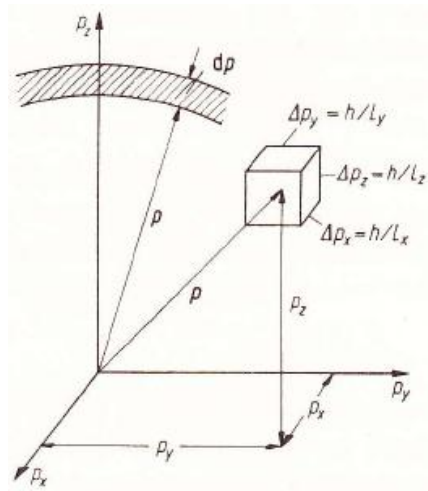


Abbildung 10 - Zustandsdichte im Impulsraum

Man erkennt zunächst, dass die Zustandsdichte proportional dem geometrischen Volumen V ist. Da auch die Leitungselektronen (oder Löcher) proportional V ist, werden die Zustände unabhängig von V jeweils bis zum gleichen Energieniveau besetzt. Diese Unabhängigkeit vom geometrischen Volumen muss sich für alle Materialeigenschaften ergeben, solange das Volumen genügend groß gegen atomare Abstände ist. Es ist üblich, $V=1$ zu wählen. Jeder dieser Zustände kann nach dem Pauli Prinzip mit zwei Elektronen mit unterschiedlichen Spins besetzt werden.

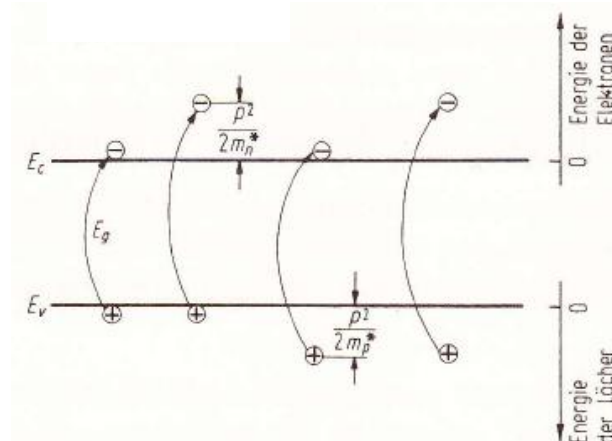


Abbildung 11 - Zusammenhang zwischen Energie und Impuls

Bezeichnet man mit $N(p)$ die Zustandsdichte (pro Volumeneinheit), wobei jeder Zustand nur noch durch ein Elektron besetzt ist (verschiedene Spins sind verschiedene Zustände) so gilt:

$$N^* dp = \frac{8\pi p^2}{h^2} dp$$

Gesucht ist jedoch die Zustandsdichte als Funktion der Energie. Es kann gezeigt werden, dass die Zuführung einer Energie $E_g = E_c - E_v$ ein Elektron-Loch-Paar erzeugt, sofern der Impulssatz erfüllt ist, wobei die kinetische Energie beider erzeugter Ladungsträger Null ist. Wird eine größere Energie E_s zugeführt, so entstehen entweder Leitungselektronen mit einer kinetischen Energie $p^2/(2m^*) = E_s - E_g$ oder durch Lösen eines energetisch tieferliegenden Valenzelektrons ein Loch mit kinetischer Energie oder ein Elektron Loch Paar, bei denen beide Ladungsträger eine von Null verschiedene kinetische Energie besitzen. Legt man den Nullpunkt der Energieskala für Elektronen auf den Wert E_c und für Löcher auf den Wert E_v , so gilt generell in Bandkannennähe:

$$E = \frac{p^2}{2m^*}$$

Der Übergang vom Impuls auf die Energie als unabhängige Variable ergibt daher:

$$p = \sqrt{2m^* E}; \quad dp = \sqrt{2m^*} \frac{1}{2\sqrt{E}} dE$$

$$N^* dE = \frac{4\pi (m^*)^{3/2} \sqrt{E}}{h^2} dE$$

Diese Zustandsdichte $N(E)$ hat die Einheit $m^{-3}J^{-1}$ und gibt die Anzahl der Zustände je Volumen und Energieeinheit an, die durch je ein Elektron besetzt werden können.

Äquivalente Zustandsdichte, Eigenleitungsträgerdichte

Die Zustandsdichte ist für Bandkanten unter Berücksichtigung der verschiedenen Nullpunkte für den Energiemaßstab der Elektronen und Löcher gezeichnet.

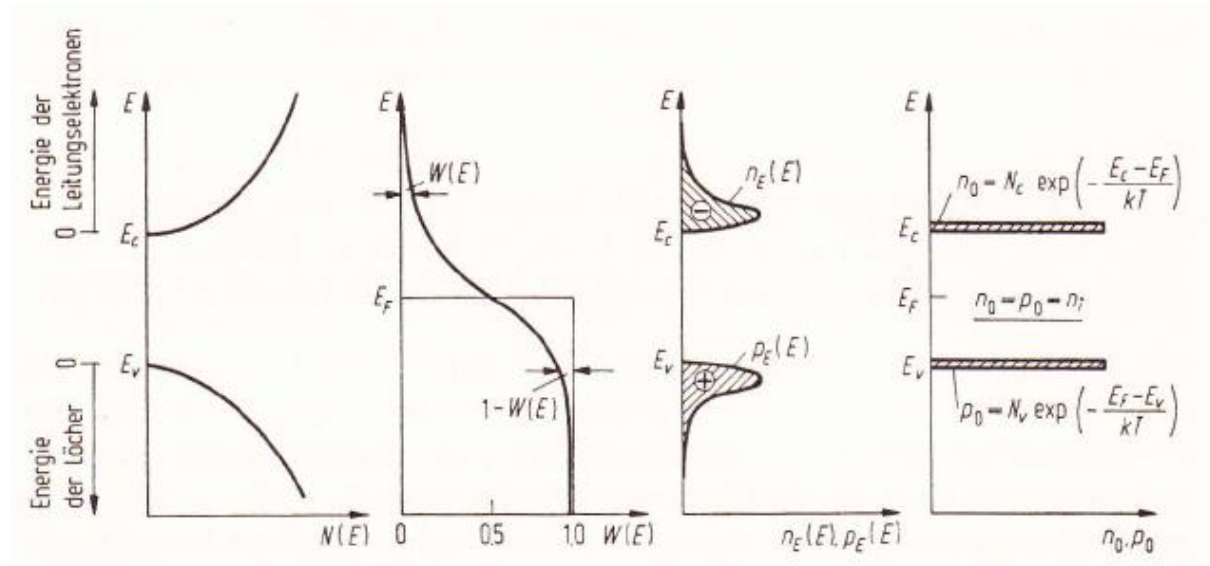


Abbildung 12 - Verteilung der Elektronen und Löcher für eigenleitende Halbleiter

Diese Zustände werden nach dem Pauli Prinzip von unten her aufgefüllt. Die Wahrscheinlichkeit der Besetzung jedes Zustandes durch ein Elektron ist durch die Fermi Verteilung $W(E)$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung durch ein Loch ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das fehlen eines Elektrons, $W_p(E) = 1 - W(E)$. Die Multiplikation der Zustandsdichte mit der Besetzungswahrscheinlichkeit ergibt die Verteilung der Elektronen $n_E(E)$ bzw. Löcher $n_p(E)$. Die Trägerdichte nimmt zunächst von der Bandkante an wegen der zunehmenden Zustandsdichte rasch zu, um jedoch bald wegen der exponentiell abnehmenden Besetzungswahrscheinlichkeit wieder zu sinken. Die Integration über $n_E(E)$ bzw. $n_p(E)$ ergibt die Gesamtzahl der pro Volumenheit vorhandenen Elektronen n bzw. Löcher p . Da es sich hier immer um thermisches Gleichgewicht handelt, wird der Index Null zur Kennzeichnung angebracht:

$$n_0 = \int_{E_c}^{\infty} N(E)W(E)dE$$

Die Integration hat sich eigentlich nur über das Leitungsband zu erstrecken, da jedoch $n_E(E)$ sehr rasch mit E abnimmt, kann die Integration bis unendlich erstreckt werden. Mit der für nicht zu starke Dotierung ($< 10^{18} \text{cm}^{-3}$) gültigen Boltzmann - Näherung erhält man:

$$n_0 = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

$$N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

Man bezeichnet N_C als äquivalente Zustandsdichte. Diese Zustandsdichte denke man sich unmittelbar an der Bandkante; sie wird mit der für die Bandkante gültigen Wahrscheinlichkeit besetzt. Ganz analog erhält man für die Löcher:

$$p_0 = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

$$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

Zur numerischen Auswertung dieser Beziehung ist die Kenntnis der Lage des Fermi-Niveaus erforderlich, dessen Ermittlung im nächsten Abschnitt besprochen wird.

Die nächste Abbildung zeigt schematisch Zustandsdichte, Verteilungsfunktion und Trägerdichten für n-Typ Halbleiter im thermischen Gleichgewicht. Für n-Typ-Halbleiter liegt, wie noch gezeigt wird, das Fermi-Niveau in der Nähe der Leitungsbandkante. Da durch die Donatoren zunächst Elektronen in den Halbleiter gebracht werden, steigt das Fermi-Niveau an.

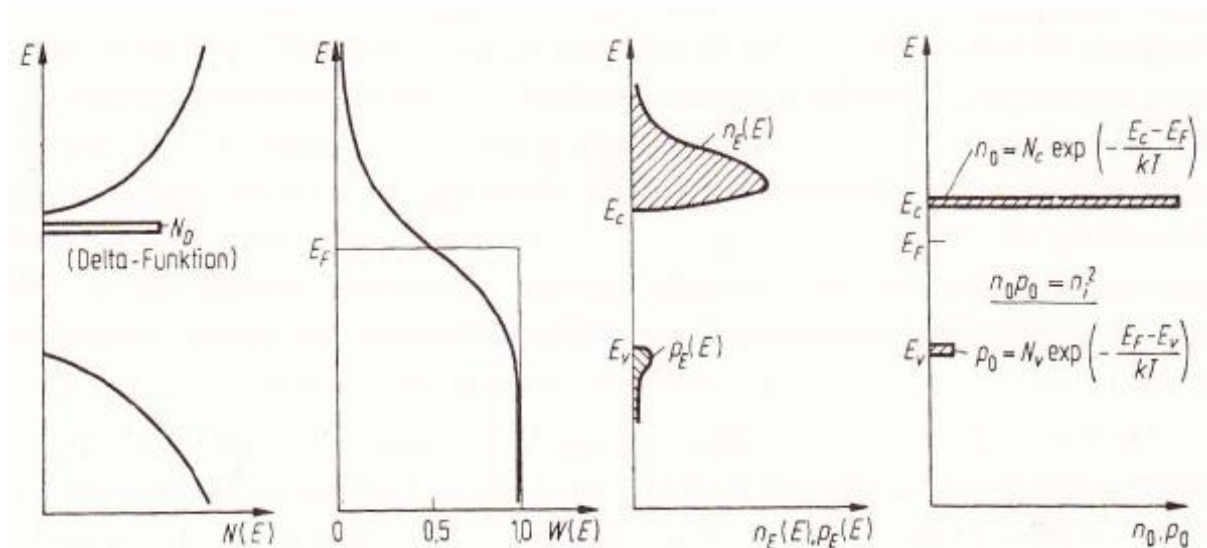


Abbildung 13 - Verteilung der Elektronen und Löcher über die Energie für n-Typ Halbleiter.

Analoge Bilder erhält man für p-Typ Halbleiter.

Bestimmung der Lage des Fermi - Niveaus

Der Halbleiter im thermischen Gleichgewicht ist elektrisch neutral. Diese Neutralitätsbedingung ermöglicht die Bestimmung der Lage der Fermi - Niveaus. Sie lautet für das Beispiel eines homogen dotierten n-Typ Halbleiters mit nur einem Donatortyp:

$$n_0 = N_D^+ + p_0$$

Darin ist N_D^+ die Dichte der ionisierten Donatoren. Sie ist gegeben durch

$$N_D^+ = N_D \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E_D - E_F}{kT}}} \right)$$

da

$$1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E_D - E_F}{kT}}}$$

die Wahrscheinlichkeit für das fehlen eines Elektrons ist.

Beschränkt man sich auf Fälle, in welchem das Fermi - Niveau in der verbotenen Zone genügend weit (mehr als 100meV) bei Zimmertemperatur) von der Bandkante entfernt ist, genügt die Verwendung der Boltzmann - Näherung für die Ermittlung der freien Ladungsträger. Das Donatorenniveau liegt innerhalb des verbotenen Bandes, und man hat hier die Fermi - Verteilung zu berücksichtigen. Damit gilt:

$$n_0 = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

$$N_D^+ = N_D \frac{e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}}{1 + e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}}$$

$$p_0 = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

Die Neutralitätsbedingung lautet damit:

$$N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} = N_D \frac{e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}}{1 + e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}} + N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für das Fermi - Niveau E_F . Sie kann grafisch einfach gelöst werden.

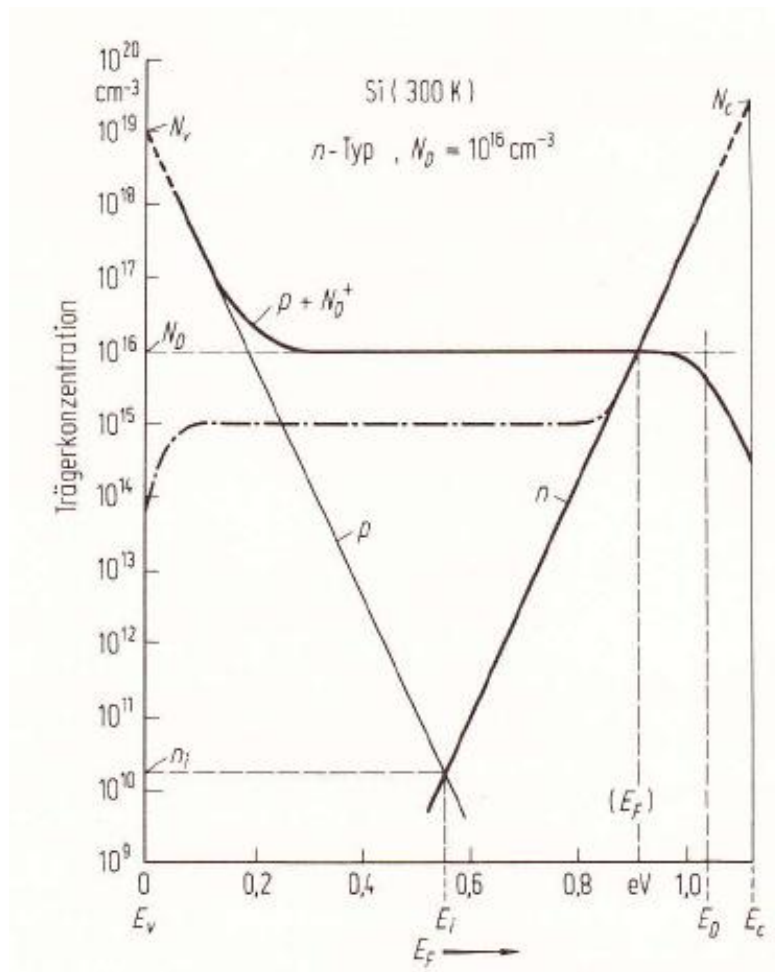


Abbildung 14 - Ermittlung der Lage des Fermi - Niveaus

In der Abbildung sind als Funktionen von E_F zunächst n_0 und p_0 im logarithmischen Maßstab eingetragen; man erhält jeweils Geraden, welche von den Werten N_c bzw. N_v bei E_c und E_v mit dem Neigungstangens $\pm 1/(kT)$ ausgehen. Ist $N_D = 0$, so ergibt der Schnittpunkt dieser Geraden bereits die Lage des Fermi - Niveaus etwa in der Mitte des verbotenen Bandes (E_i); die zugehörige Trägerdichte ist gleich der Eigenleitungsdichte n_i . Ist der Halbleiter dotiert, so hat man die Kurve $N_D^+(E_F)$ einzutragen, welche für $|E_F - E_D| \gg kT$ durch Geraden der Neigung Null bzw. $-1/(kT)$ angenähert werden kann. Durch die Addition kann man die Kurve $p_0 + N_D^+$ erhalten, doch ist dies bei einer Dotierung, die etwa eine Zehnerpotenz höher als die Eigenleitungsdichte ist, zur Ermittlung des Fermi - Niveaus nicht erforderlich; der Schnittpunkt zwischen N_D^+ und n_0 ergibt dann das gesuchte Fermi - Niveau. Solange die Dotierungsdichte klein gegen die äquivalente Zustandsdichte ist, wird außerdem der Schnittpunkt auf der horizontalen Geraden $N_D^+ = N_D$ liegen; d.h. solange die Dotierung nicht sehr groß ist, gilt die Annahme, dass alle Donatoren ionisiert sind und das Fermi - Niveau mehr als 100meV unter dem Donator Niveau liegt.

Ganz analog ermittelt man das Fermi - Niveau im p-Typ Halbleiter.

Sind außer den Donatoren noch Akzeptoren vorhanden, so hat man in der Neutralitätsbedingung für die negativen Ladungen $N_A + n_0$ einzusetzen. Dies ergibt die strichpunktiert eingezeichnete Kurve. Für $N_A < N_D$ ändert sich praktisch nichts am Schnittpunkt der Kurven für positive und negative Ladungen.

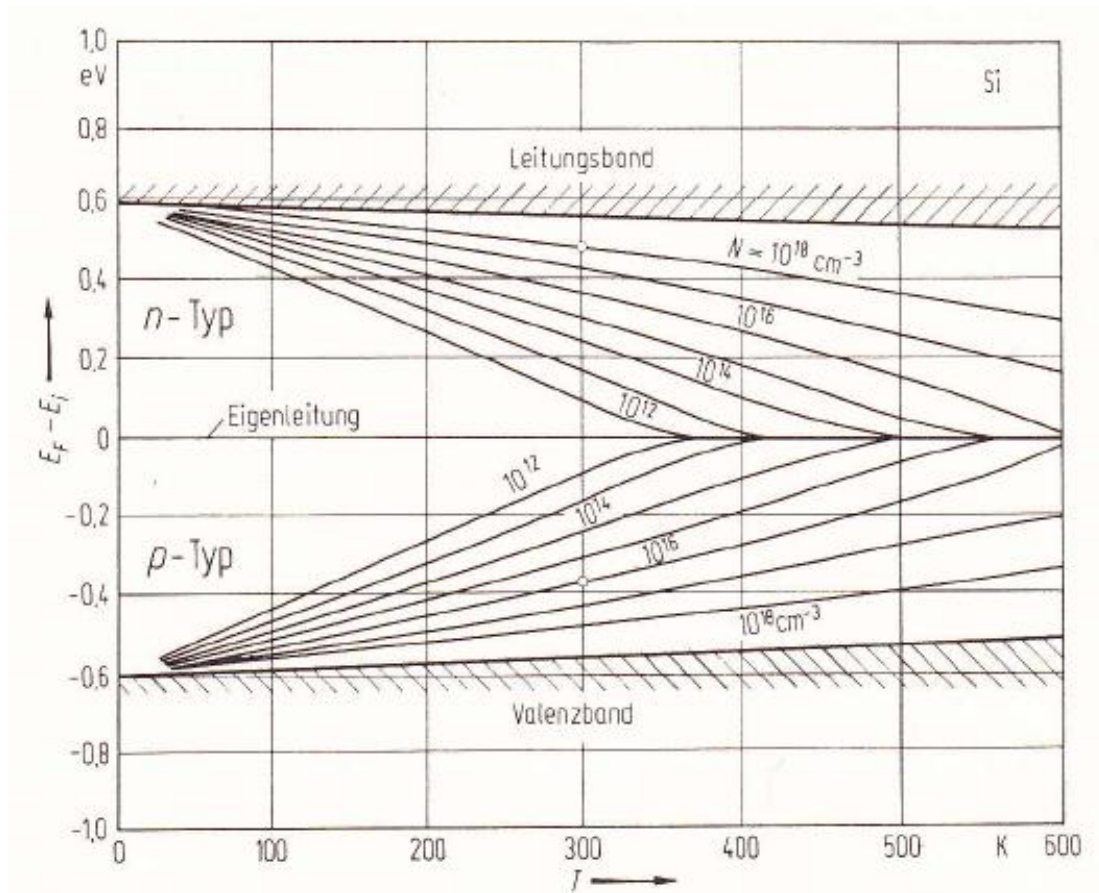


Abbildung 15 - Fermi - Niveau im Silizium als Funktion der Temperatur mit der Dotierungskonzentration als Parameter.